

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ALUSTATUD 1893. a.

VIHİK № 46

ВЫПУСК

ОСНОВАНЫ В 1893 г.

МАТЕМАТИКА-LOODUSTEADUSKONNA TÖID
ТРУДЫ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ФАКУЛЬТЕТА



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1957

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
VIHK 46 ВЫПУСК

МАТЕМАТИКА-LOODUSTEADUSKONNA TÖID
ТРУДЫ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ФАКУЛЬТЕТА



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1957

Redaktsiooni-kolleegium:

A. V a g a (vastutav toimetaja), G. K a n g r o, H. K e r e s, O. M i h h a i l o v,
K. O r v i k u, H. R i i k o j a, N. R ä g o, E. V a r e p.
A. P r a v d i n ja E. U u s p ö l d (sekretärid).

Редакционная коллегия:

A. B a g a (ответственный редактор), Э. В а р е п, Г К а н г р о, X. К е р е с,
O. M и х а й л о в, K. O р в и к у, X. P и й к о я, H. P я г о.
A. П р а в д и н и Э. У с п ы л ь д (секретари).

О МНОЖИТЕЛЯХ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

Проф., докт. физ.-мат. наук Г. Кангро

Кафедра геометрии

Теория множителей суммируемости двойных рядов до сих пор еще остается сравнительно мало разработанной. После появления в печати в 1938 г. монографии Мура [1], посвященной исследованию вопроса о множителях ограниченной сходимости для рядов, простых или кратных, ограниченно суммируемых некоторыми методами Вороного-Нёрлунда, проблемой множителей суммируемости кратных рядов почти не занимались. В то же время интенсивно продолжались исследования по множителям суммируемости в области простых рядов. В результате обобщения некоторых фактов, полученных Бозанкет [2—5], Лоренцом [6] и Кнопфом [7] для множителей суммируемости, относящихся к методу Чезаро, в последние годы возник новый метод изучения множителей суммируемости для простых рядов. Этот метод, развитый, в основном, немецким математиком Пейеримхоффом [8—11], дает в тех случаях, когда он применим, весьма удобный способ для нахождения множителей суммируемости.

Целью настоящей статьи является распространение метода Пейеримхоффа на двойные ряды. Так как получение теорем о множителях суммируемости в области двойных рядов довольно затруднительно, то метод Пейеримхоффа своей сравнительной простотой оказывается особенно пригодным для изучения множителей суммируемости двойных рядов.

При переходе от простых рядов к двойным метод Пейеримхоффа в известной мере усложняется. Но при переходе от двойных рядов к многократным дальнейшим усложнениям, кроме технических, не будет. Поэтому и ограничимся в настоящей статье изучением множителей суммируемости для двойных рядов.

§ 1. Введение

1. Понятие о множителях суммируемости. Пусть дан некоторый двойной ряд¹

$$\sum_{\mu, \nu} u_{\mu\nu} \quad (1)$$

с комплексными членами $u_{\mu\nu}$ и двойная последовательность комплексных чисел

$$\{\varepsilon_{\mu\nu}\} \quad (2)$$

Объектами нашего исследования служат двойные ряды

$$\sum_{\mu, \nu} \varepsilon_{\mu\nu} U_{\mu\nu} \quad (3)$$

и

$$\sum_{\mu, \nu} \varepsilon_{\mu\nu} u_{\mu\nu}, \quad (4)$$

где через $U_{\mu\nu}$ обозначены частные суммы ряда (1), т. е.

$$U_{\mu\nu} = \sum_{\kappa, \lambda=0}^{\mu, \nu} u_{\kappa\lambda}.$$

В теории рядов важную роль играет следующая проблема: каким условиям должна удовлетворять последовательность (2) чтобы для каждого ряда (1) из заданного класса A' ряд (3), соответственно (4), принадлежал к некоторому классу B' . Классы A' и B' мы определим при помощи методов суммирования, данных четырехмерными матрицами $A = (a_{m\mu\nu})$ и $B = (\beta_{m\mu\nu})$. Напомним коротко относящиеся сюда понятия.

Мы назовем ряд (1) суммируемым матрицей A или A -суммируемым (A -ограниченным), если двойная последовательность $\{U'_{mn}\}$, получаемая из ряда (1) преобразованием

$$U'_{mn} = \sum_{\mu, \nu} a_{m\mu\nu} u_{\mu\nu} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (5)$$

сходится в смысле Прингсхейма (ограничена)

Далее, если последовательность $\{U'_{mn}\}$ ограниченно сходится (вполне сходится), то будем называть ряд (1) ограниченно A -суммируемым или A_b -суммируемым (вполне

¹ Если пределы суммирования у знака суммы не указаны, то индексы суммирования μ, ν пробегает все целочисленные значения $0, 1, 2, \dots$

A -суммируемым или A_r -суммируемым). При этом под ограниченной сходимостью (короче b -сходимостью) последовательности $\{U'_{\mu\nu}\}$ подразумеваем сходимость в смысле Прингсхейма вместе с ограниченностью последовательности $\{U'_{\mu\nu}\}$, а под полной сходимостью (короче r -сходимостью) последовательности $\{U'_{\mu\nu}\}$ — сходимость в смысле Прингсхейма вместе со сходимостью всех строк и столбцов матрицы $\{U'_{\mu\nu}\}$. В дальнейшем мы, говоря о сходимости в смысле Прингсхейма, слова «в смысле Прингсхейма», как правило, опустим.

Отметим, что для того, чтобы преобразование (5) было определено, будем требовать сходимость всех двойных рядов

$$\sum_{\mu, \nu} a_{m\mu\nu} u_{\mu\nu} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Наконец, предел

$$U = \lim_{m, n \rightarrow \infty} U'_{mn}$$

именуется A -суммой ряда (1) и обозначается

$$U = A \left\{ \sum u_{\mu\nu} \right\}$$

Аналогично определяются понятия о B -суммируемости, B -ограниченности и т. д.

Класс A' можно образовать из всех A -суммируемых, A -ограниченных и т. д., класс B' из всех B -суммируемых, B -ограниченных и т. д. рядов.

О п р е д е л е н и е. Величины $\epsilon_{\mu\nu}$ будем называть множителями суммируемости типа (\mathfrak{A}', B') , соответственно $(A' B')$, если для каждого ряда (1) из класса A' ряд (3), соответственно (4), принадлежит классу B' . Множители суммируемости типа (\mathfrak{A}', B') называем также множителями первого рода, а множители суммируемости типа $(A' B')$ — множителями второго рода.

В частности, если класс B' состоит из всех сходящихся в некотором смысле рядов, так что имеем:

$$\beta_{m\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu, \nu \leq m, n \\ 0 & \text{при } \mu > m \text{ или } \nu > n \text{ или } \mu, \nu > m, n, \end{cases}$$

то вместо множителей суммируемости типа (\mathfrak{A}', B') , соответственно $(A' B')$ говорят о множителях сходимости для \mathfrak{A}' соответственно A' . Согласно разным видам сходимости двойных последовательностей различаются разные виды множителей сходимости (множители сходимости в смысле Прингсхейма, множители b -сходимости и т. д.).

В настоящей статье рассматриваются множители суммируемости первого рода типов ¹ (\mathcal{A}_b, B'). (\mathcal{A}_0, B') и множители сходимости второго рода для A_b, A_0 .

2. Сущность метода Пейеримхоффа. Метод Пейеримхоффа, развитый им для изучения множителей суммируемости простых рядов, состоит, говоря в концепциях теории двойных рядов, в следующем. Прежде всего пытаются найти общее условие, необходимое для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были множителями суммируемости типа ($\mathcal{A}' B'$), соответственно ($A' B'$). При этом требуется независимость искомого условия от класса B' , т. е. от величин $\beta_{\mu\nu}$. Такое необходимое условие получается в теории Пейеримхоффа из факта, полностью доказанного для простых рядов Целлером [12], что B -сумма ряда (3), соответственно (4), представляет собой непрерывный линейный функционал в классе A' , являющемся пространством типа FK .

Далее, путем накладывания известных ограничений на класс A' пытаются создать такое положение, при котором найденное уже необходимое условие оказалось бы — по крайней мере после прибавления некоторого несложного добавочного необходимого условия — и достаточным для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были множителями суммируемости рассматриваемого типа. Эти ограничения, выражающиеся в теории Пейеримхоффа в требовании наличия сходимости по отрезкам в некоторой части класса A' имеют место не при всех методах суммирования, имеющих значение в приложениях. Вследствие этого область применения метода Пейеримхоффа ограничена, но зато в тех случаях, когда метод Пейеримхоффа применим, он сравнительно быстро приводит к цели.

При помощи своего метода Пейеримхоффу удалось полностью решить вопрос о множителях суммируемости первого рода рассматриваемых им типов [8, 10], в то время как для множителей суммируемости второго рода ему (вместе с Юркатом) удалось полностью решить только некоторые частные случаи, в том числе случай множителей сходимости и случай $B' = A'$ [9, 11]. Причина возникновения серьезных затруднений при изучении множителей суммируемости второго рода методом Пейеримхоффа кроется, по-видимому, в том, что добавочные необходимые условия, которые следовало бы прибавить к основному необходимому условию с целью получения точных условий, в некоторых случаях являются довольно сложными, как это следует, например, из исследований автора по методу взвешенных средних арифметических [13].

Затруднения, возникшие при изучении множителей суммируемости второго рода для простых рядов, значительно углубляются в случае двойных рядов, причем вместо одного основного необхо-

¹ Ради краткости обозначаются суммируемость и соответствующий ей класс суммируемых рядов одной и той же буквой. Также одним и тем же символом A_0 обозначаются и A -ограниченность, и класс A -ограниченных рядов.

димого условия, встретившегося в исследованиях Пейеримхоффа, понадобятся три таких условия, из которых одно лишь не зависит от класса B' . Вследствие этого при изучении множителей суммируемости второго рода для двойных рядов мы ограничимся лишь случаем множителей сходимости.

Пейеримхофф в своей кандидатской диссертации [8] применяет методы линейного функционального анализа для вывода основных своих результатов, в то время как в своей докторской диссертации [10] он использует метод обратного преобразования, хотя в рассматриваемом там случае абсолютной суммируемости методы функционального анализа также применимы. Поскольку вопросы приложения методов функционального анализа в теории двойных рядов еще весьма мало исследованы, то предпочтем в настоящей статье метод обратного преобразования. Если ограничиваться нормальными матрицами A , как это предполагает, по существу, Пейеримхофф при изучении множителей суммируемости простых рядов, то методы функционального анализа, по сравнению с методом обратного преобразования, к более общим результатам приводить не могут.

Главные результаты настоящей статьи опубликованы без доказательств в [20]

§ 2. Треугольные матрицы суммирования Некоторые леммы

1. Нормальные матрицы суммирования. При изучении множителей суммируемости мы предположим, что матрица $A = (a_{mn\mu\nu})$ нормальна. Матрицу A назовем нормальной, если она треугольна, т. е. удовлетворяет условию

$$a_{mn\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu > m \text{ или } \nu > n \text{ или } \mu, \nu > m, n, \quad (6)$$

и если, сверх того,

$$a_{mnmn} \neq 0 \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

Если матрица A треугольна, то преобразование (5) можно переписать в виде

$$U'_{mn} = \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} a_{mn\mu\nu} u_{\mu\nu} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Отметим, что в случае нормальности матрицы A существует и обратное преобразование

$$u_{mn} = \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} \eta_{mn\mu\nu} U'_{\mu\nu} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (8)$$

где

$$(\eta_{mn\mu\nu}) = A^{-1}$$

При помощи преобразования Абеля-Харди из (7) для $m, n > 0$ мы получим:

$$U'_{mn} = \sum_{\mu, \nu=0}^{m-1, n-1} (\Delta_{\mu\nu} a_{mn\mu\nu}) U_{\mu\nu} + \sum_{\mu=0}^{m-1} (\Delta_{\mu} a_{mn\mu\nu}) U_{\mu n} + \\ + \sum_{\nu=0}^{n-1} (\Delta_{\nu} a_{m\nu n\nu}) U_{m\nu} + a_{mnnn} U_{mn},$$

причем

$$\Delta_{\mu} a_{mn\mu\nu} = a_{m\nu\mu\nu} - a_{m\nu, \mu+1, \nu}, \\ \Delta_{\nu} a_{m\nu n\nu} = a_{m\nu n\nu} - a_{m\nu, \nu+1, n}, \\ \Delta_{\mu\nu} a_{mn\mu\nu} = \Delta_{\mu} (\Delta_{\nu} a_{mn\mu\nu}) = \Delta_{\nu} (\Delta_{\mu} a_{mn\mu\nu}) = \\ = a_{m\nu\mu\nu} - a_{m\nu, \mu+1, \nu} - a_{m\nu, \mu, \nu+1} + a_{m\nu, \mu+1, \nu+1}$$

Учитывая условие (6), можем написать короче

$$U'_{mn} = \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} (\Delta_{\mu\nu} a_{mn\mu\nu}) U_{\mu\nu}$$

или

$$U'_{mn} = \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} a_{mn\mu\nu} U_{\mu\nu} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (9)$$

где

$$a_{mn\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu} a_{mn\mu\nu}.$$

Соотношения (7) и (9) определяют один и тот же метод суммирования: соотношения (7) — при помощи преобразования ряда в последовательность, соотношения (9) — при помощи преобразования последовательности в последовательность.

Положим

$$(a_{mn\mu\nu}) = \mathfrak{A}.$$

Ввиду того, что преобразования (7) и (9) определяют один и тот же метод суммирования, часто вместо выражений «ряд (1) А-суммируем» или «матрица А суммирует ряд (1)» будем употреблять выражения «последовательность $\{U_{\mu\nu}\}$ \mathfrak{A} -суммируема» или «матрица \mathfrak{A} суммирует последовательность $\{U_{\mu\nu}\}$ » и т. д., где $U_{\mu\nu}$ — частные суммы ряда (1). Матрицу метода суммирования, данного при помощи преобразования ряда в последовательность, будем обозначать всегда латинской, а матрицу того же метода, данного при помощи преобразования последовательности в последовательность, соответствующей готической буквой.

Если матрица A нормальна, то нормальна и \mathfrak{A} . Тогда преобразование (9) имеет обратное преобразование

$$U_{mn} = \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} \xi_{mn\mu\nu} U'_{\mu\nu} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (10)$$

где

$$(\xi_{mn\mu\nu}) = \mathfrak{A}^{-1}$$

Отметим в заключение, что

$$\xi_{mnmn} = \eta_{mnmn} = \frac{1}{a_{mnmn}}. \quad (11)$$

2. Некоторые леммы. Пусть $\mathfrak{A} = (a_{mn\mu\nu})$ — треугольная матрица, определяющая при помощи преобразования (9) некоторый метод суммирования последовательностей. Относительно \mathfrak{A} нам понадобятся в дальнейшем три леммы, которые мы приводим без доказательства.

Лемма 1. Треугольная матрица $\mathfrak{A} = (a_{mn\mu\nu})$: а) суммирует, б) ограниченно суммирует, с) вполне суммирует все ограниченные последовательности тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} |a_{mn\mu\nu}| \leq M \quad (m, n \geq N),$$

2° существуют числа $a'_{\mu\nu}$, такие, что при $m, n \rightarrow \infty$ имеем¹:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } \lim \\ \text{б) } \lim \\ \text{с) } r\text{-}\lim \end{array} \right\} \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} |a_{mn\mu\nu} - a'_{\mu\nu}| = 0,$$

причем в случаях б) и с) $N = 0$.

Лемма 2. Треугольная матрица $\mathfrak{A} = (a_{mn\mu\nu})$ а) суммирует, б) ограниченно суммирует, с) вполне суммирует все ограниченно сходящиеся к нулю последовательности тогда и только тогда, когда

¹ Под символом

$$r\text{-}\lim_{m, n} S_{mn} = 0$$

подразумевается

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} S_{mn} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{mn} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{mn} = 0.$$

В соответствии с этим в случае с) имеем:

$$a'_{\mu\nu} = \begin{cases} \lim_{m, n \rightarrow \infty} a_{mn\mu\nu} & \text{для предела при } m, n \rightarrow \infty \\ \lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn\mu\nu} & \text{'' '' '' } m \rightarrow \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn\mu\nu} & \text{'' '' '' } n \rightarrow \infty. \end{cases}$$

$$1^\circ \sum_{\nu=0}^{m,n} |a_{m\nu\nu}| \leq M \quad (m, n \geq N),$$

2° существуют числа $a'_{\mu\nu}$, такие, что при $m, n \rightarrow \infty$ имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \lim \\ \text{b) } \lim \\ \text{c) } r\text{-}\lim \end{array} \right\} \sum_{\mu=0}^m |a_{m\nu\nu} - a'_{\mu\nu}| = \lim_{r\text{-}\lim} \left. \sum_{\nu=0}^n |a_{m\nu\nu} - a'_{\mu\nu}| = 0, \right.$$

причем в случаях б) и с) $N = 0$.

Лемма 3. Если матрица $^1 \mathcal{A} = (a_{m\nu\nu})$ суммирует все ограниченные (b -сходящиеся к нулю) последовательности, то для каждой ограниченной (b -сходящейся к нулю) последовательности $\{U_{\mu\nu}\}$ справедливо соотношение

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{\mu,\nu} a_{m\nu\nu} U_{\mu\nu} = \sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} U_{\mu\nu}$$

где $a_{\mu\nu} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{m\nu\nu}$.

Леммы 1—3 можно найти у Гамильтона [14], а случай б) лемм 1 и 2 уже у Робисона [15].

Пусть $B = (\beta_{m\nu\nu})$ — произвольная матрица, определяющая при помощи преобразования типа (5) некоторый метод суммирования рядов. Относительно матрицы B нас интересует следующая лемма.

Лемма 4. Матрица $B = (\beta_{m\nu\nu})$: а) суммирует, б) ограниченно суммирует, с) вполне суммирует все r -сходящиеся ряды тогда и только тогда, когда 2

$$1^\circ \sum_{\mu,\nu} |\bar{\Delta}_{\mu\nu} \beta_{m\nu\nu}| \leq M \quad (m, n \geq N),$$

$$2^\circ \text{ при } m, n \rightarrow \infty \text{ существует } \left. \begin{array}{l} \text{a) } \lim \\ \text{b) } \lim \\ \text{c) } r\text{-}\lim \end{array} \right\} \beta_{m\nu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots),$$

причем в случаях б) и с) $N = 0$, а в случае а) сходимость ряда

$$\sum_{\mu,\nu} |\bar{\Delta}_{\mu\nu} \beta_{m\nu\nu}| \text{ требуется для всех } m, n = 0, 1, 2,$$

¹ Треугольная или нет.

² Здесь

$$\bar{\Delta}_{\mu\nu} \beta_{m\nu\nu} = \beta_{m\nu\nu} - \beta_{m\nu, \mu-1, \nu} - \beta_{m\nu\mu, \nu-1} + \beta_{m\nu, \mu-1, \nu-1}.$$

причем положим

$$\beta_{m\nu, -1, \nu} = \beta_{m\nu\mu, -1} = \beta_{m\nu, -1, -1} = 0.$$

При этом сумма каждого r -сходящегося ряда сохраняется тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \beta_{mn\mu\nu} = 1 \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Лемма 4 принадлежит Нигаму [16].

§ 3. Основные необходимые условия

1. Метод нахождения основных необходимых условий для множителей суммируемости. Пусть \mathcal{Q}' — некоторый класс двойных последовательностей, а A' — класс всех тех рядов, которые преобразуются нормальной матрицей $A = (a_{mn\mu\nu})$ в последовательности класса \mathcal{Q}' . Наконец, пусть B' — один из классов всех B -, B_b - или B_r -суммируемых рядов.

Согласно определению множителей суммируемости, величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ являются множителями суммируемости типа (\mathcal{Q}', B') только тогда, когда для всех рядов (1) класса A' ряды

$$\sum_{\kappa, \lambda} \beta_{mn\kappa\lambda} \varepsilon_{\kappa\lambda} U_{\kappa\lambda} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (12)$$

сходятся, так же как последовательность их сумм.

Используя соотношение (10), мы найдем:

$$\sum_{\kappa, \lambda=0}^{k, l} \beta_{mn\kappa\lambda} \varepsilon_{\kappa\lambda} U_{\kappa\lambda} = \sum_{\kappa, \lambda=0}^{k, l} c_{k\lambda\kappa\lambda}^{mn} U'_{\kappa\lambda} \quad (k, l = 0, 1, 2, \dots), \quad (13)$$

где

$$c_{k\lambda\kappa\lambda}^{mn} = \sum_{\mu, \nu=\kappa, \lambda}^{k, l} \beta_{mn\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \xi_{\mu\nu\kappa\lambda}.$$

Соотношения (13) показывают, что для сходимости рядов (12) необходимо и достаточно, чтобы треугольные матрицы $(c_{k\lambda\kappa\lambda}^{mn})$ суммировали все последовательности класса \mathcal{Q}' .

Обозначим через \mathcal{Q}'' подкласс класса \mathcal{Q}' состоящий из тех последовательностей $\{U'_{\kappa\lambda}\}$ класса \mathcal{Q}' , при которых имеет место соотношение

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa, \lambda} c_{mn\kappa\lambda} U'_{\kappa\lambda} = \sum_{\kappa, \lambda} c_{\kappa\lambda} U'_{\kappa\lambda} \quad (c_{\kappa\lambda} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} c_{mn\kappa\lambda})$$

¹ Не обязательно из всех.

для каждой матрицы $(c_{mn\kappa\lambda})$, суммирующей все последовательности подкласса \mathfrak{Q}'' . Если $\{U'_{\kappa\lambda}\} \in \mathfrak{Q}''$, то, перейдя в (13) к пределу при $k, l \rightarrow \infty$, мы получим:

$$\sum_{\kappa, \lambda} \beta_{mn\kappa\lambda} \varepsilon_{\kappa\lambda} U_{\kappa\lambda} = \sum_{\kappa, \lambda} c_{mn\kappa\lambda} U'_{\kappa\lambda} \quad (m, n = 1, 2, \dots), \quad (14)$$

где

$$c_{mn\kappa\lambda} = \lim_{k, l \rightarrow \infty} c_{kl\kappa\lambda}^{mn}$$

Из (14) вытекает, что для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ служили множителями суммируемости типа (\mathfrak{M}', B') , необходимо, чтобы матрица $(c_{mn\kappa\lambda})$ суммировала все последовательности подкласса \mathfrak{Q}'' . Согласно понятию подкласса \mathfrak{Q}'' из (14) при $m, n \rightarrow \infty$ мы найдем:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa, \lambda} \beta_{mn\kappa\lambda} \varepsilon_{\kappa\lambda} U_{\kappa\lambda} = \sum_{\kappa, \lambda} c_{\kappa\lambda} U'_{\kappa\lambda}, \quad (15)$$

причем

$$c_{\kappa\lambda} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} c_{mn\kappa\lambda}, \quad \{U'_{\kappa\lambda}\} \in \mathfrak{Q}''$$

Предположим, с одной стороны, что подкласс \mathfrak{Q}'' содержит все последовательности $\{a_{\kappa\lambda\mu\nu}\}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$) и, с другой стороны, что матрица B удовлетворяет условию

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \beta_{mn\mu\nu} = 1 \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Тогда, ввиду (9), из (15) при $U_{\kappa\lambda} = \delta_{\kappa\lambda\mu\nu}$,

$$\delta_{\kappa\lambda\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{если } \kappa = \mu, \lambda = \nu \\ 0 & \text{в ост. случаях} \end{cases}$$

и вытекает искомое необходимое условие

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\kappa, \lambda = \mu, \nu}^{\infty} c_{\kappa\lambda} a_{\kappa\lambda\mu\nu},$$

где $c_{\kappa\lambda} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} c_{mn\kappa\lambda}$, а матрица $(c_{mn\kappa\lambda})$ суммирует все последовательности подкласса \mathfrak{Q}'' .

Предыдущие рассуждения применимы и в случае множителей суммируемости типа (A', B') , причем полученные выше формулы остаются справедливыми для множителей суммируемости типа

(A', B') , если в них заменить $U_{\kappa\lambda}$ через $u_{\kappa\lambda}$ и $\xi_{\mu\nu\kappa\lambda}$ через $\eta_{\mu\nu\kappa\lambda}$. В частности, вместо соотношения (15) мы получим:

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa,\lambda} \beta_{m\kappa\lambda} \varepsilon_{\kappa\lambda} u_{\kappa\lambda} = \sum_{\kappa,\lambda} c_{\kappa\lambda} U'_{\kappa\lambda},$$

откуда при $U_{\kappa\lambda} = \delta_{\kappa\lambda\mu\nu}$, т. е. при $u_{\kappa\lambda} = \bar{\Delta}_{\kappa\lambda} \delta_{\kappa\lambda\mu\nu}$ вытекает условие

$$\Delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\kappa,\lambda=\mu,\nu}^{\infty} c_{\kappa\lambda} a_{\kappa\lambda\mu\nu}$$

необходимое для множителей суммируемости типа $(A' B')$

Таким образом, оказывается справедливым следующее предложение.

Теорема 1. Пусть \mathfrak{X}' — класс двойных последовательностей, преобразующихся нормальной матрицей $\mathfrak{X} = (a_{m\kappa\mu\nu})$ в последовательности некоторого класса \mathfrak{Q}' а B' — один из классов B -, B_b - или B_r -суммируемых рядов. Предположим, что определенный выше подкласс \mathfrak{Q}'' класса \mathfrak{Q}' содержит все двойные последовательности $\{a_{\kappa\lambda\mu\nu}\}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$), а матрица $B = (\beta_{m\kappa\mu\nu})$ удовлетворяет условию $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \beta_{m\kappa\mu\nu} = 1$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$)

Тогда для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были множителями суммируемости типа $(\mathfrak{X}' B')$, соответственно $(A' B')$, необходимо выполнение условия

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\kappa,\lambda=\mu,\nu}^{\infty} c_{\kappa\lambda} a_{\kappa\lambda\mu\nu},$$

соответственно

$$\Delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\kappa,\lambda=\mu,\nu}^{\infty} c_{\kappa\lambda} a_{\kappa\lambda\mu\nu},$$

где $c_{\kappa\lambda} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} c_{m\kappa\lambda}$, а матрица $(c_{m\kappa\lambda})$ суммирует все последовательности подкласса \mathfrak{Q}''

2. Основные необходимые условия в случаях $A' = A_0$ и $A' = A_b$. Применим теорему 1 к множителям суммируемости типов (\mathfrak{X}_0, B') , (A_0, B') и (\mathfrak{X}_b, B') , (A_b, B') , где B' по-прежнему один из классов B -, B_b - или B_r -суммируемых рядов. В рассматриваемых случаях классом \mathfrak{Q}' является класс ограниченных, соответственно b -сходящихся последовательностей. Согласно лемме 3, в качестве подкласса \mathfrak{Q}'' можно взять сам класс ограниченных, соответственно класс b -сходящихся к нулю последовательностей.

тельностью. В обоих случаях из условия 1° лемм 1 и 2 для произвольных фиксированных k, l вытекает ¹

$$\sum_{\substack{k, l \\ \kappa, \lambda = 0}} |c_{mn\kappa\lambda}| \leq M \quad (m, n \geq N),$$

откуда при $m, n \rightarrow \infty$ заключаем

$$\sum_{\kappa, \lambda} |c_{\kappa\lambda}| < \infty.$$

Теперь из теоремы 1 без труда получаются следующие предложения.

Теорема 2. Пусть матрицы \mathfrak{A} и B удовлетворяют условиям

$$|a_{mn\mu\nu}| \leq M_{\mu\nu} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \beta_{mn\mu\nu} = 1.$$

Тогда для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были множителями суммируемости типа (\mathfrak{A}_0, B') , соответственно (A_0, B') , необходимо выполнение условия

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\kappa, \lambda = \mu, \nu}^{\infty} c_{\kappa\lambda} a_{\kappa\lambda\mu\nu}, \quad \sum_{\kappa, \lambda} |c_{\kappa\lambda}| < \infty,$$

соответственно

$$\Delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\kappa, \lambda = \mu, \nu}^{\infty} c_{\kappa\lambda} a_{\kappa\lambda\mu\nu}, \quad \sum_{\kappa, \lambda} |c_{\kappa\lambda}| < \infty.$$

Теорема 3. Пусть матрицы \mathfrak{A} и B удовлетворяют условиям ²

$$b\text{-}\lim_{m, n \rightarrow \infty} a_{mn\mu\nu} = 0, \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \beta_{mn\mu\nu} = 1.$$

¹ Ради удобства дальнейших применений леммы 1 и 2 сформулированы для треугольных матриц. В общем случае условие 1° лемм 1 и 2 гласит:

$$\sum_{\mu, \nu} |a_{mn\mu\nu}| \leq M \quad (m, n \geq N),$$

вследствие чего наше заключение остается справедливым и тогда, когда матрица $(c_{mn\kappa\lambda})$ не треугольна.

² Под символом

$$b\text{-}\lim_{m, n \rightarrow \infty} S_{mn} = 0$$

подразумевается

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} S_{mn} = 0, \quad S_{mn} = O(1) \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Тогда для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были множителями суммируемости типа (\mathfrak{A}_b, B') соответственно (A_b, B') , необходимо выполнение соответствующих условий теоремы 2.

§ 4. Ограничения, накладываемые на матрицу \mathfrak{A}

1. Общий вид ограничений. В предыдущем параграфе были выведены основные необходимые условия для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ служили множителями суммируемости некоторых типов. Полученные необходимые условия являются общими в том смысле, что они, имеющие место для всех матриц B , у которых $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \beta_{mn\mu\nu} = 1$, не зависят от специального вида этих матриц.

Этой общностью и объясняется тот факт, что названные условия достаточными, вообще говоря, не являются. Чтобы получить точные, т. е. необходимые и достаточные условия, будем накладывать на матрицу \mathfrak{A} некоторые более сильные ограничения. Эти ограничения бывают двух типов и выражаются соответственно в виде следующих условий:

$$|U_{mn}^{kl}| \leq M_0 \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \text{ если } \{U_{\mu\nu}\} \in \mathfrak{A}_0, \quad (16)$$

$$b\text{-}\lim_{m, n \rightarrow \infty} U_{mn}^{kl} = 0 \text{ равномерно по } k, l, \text{ если } \{U_{\mu\nu}\} \in \mathfrak{A}_b^0, \quad (17)$$

где

$$U_{mn}^{kl} = \sum_{\mu, \nu=0}^{k, l} a_{mn\mu\nu} U_{\mu\nu} \quad (k, l \leq m, n),$$

а через \mathfrak{A}_b^0 обозначен класс последовательностей, \mathfrak{A}_b -суммируемых к нулю.

В некоторых случаях выполнение условий (16) и (17) непосредственно проверяемо. Например, для метода суммирования взвешенных средних арифметических (R, p_{mn}) , элементы матрицы которого определяются формулой

$$a_{mn\mu\nu} = \begin{cases} \frac{p_{\mu\nu}}{p_{mn}} & \text{при } \mu, \nu \leq m, n \\ 0 & \text{при } \mu > m \text{ или } \nu > n \text{ или } \mu, \nu > m, n, \end{cases}$$

где $\{p_{\mu\nu}\}$ — данная последовательность отличных от нуля чисел, таких, что

$$p_{mn} = \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} p_{\mu\nu} \neq 0,$$

можно установить следующее предложение.

¹ Постоянная M_0 зависит, вообще говоря, от $\{U_{\mu\nu}\}$.

Теорема 4. Метод (R, ρ_{mn}) удовлетворяет условию (16), если

$$1^\circ |P_{kl}| \leq M |P_{mn}| \quad (k, l \leq m, n),$$

и условию (17), если, кроме того,

$$2^\circ \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{P_{mn}} \sum_{\mu=0}^m |p_{\mu\nu}| = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{P_{mn}} \sum_{\nu=0}^n |p_{\mu\nu}| = 0.$$

Доказательство. Согласно определению метода (R, ρ_{mn}) , мы имеем:

$$U_{mn}^{kl} = \sum_{\mu, \nu=0}^{k, l} \frac{p_{\mu\nu}}{P_{mn}} U_{\mu\nu},$$

откуда

$$U_{mn}^{kl} = \frac{P_{kl}}{P_{mn}} U'_{kl}, \quad (18)$$

где

$$U'_{kl} = U_{kl}^{kl}.$$

Так как $|U'_{kl}| \leq K$ при $\{U_{\mu\nu}\} \in \mathfrak{A}_0$, то первая часть теоремы 4 непосредственно следует из (18)

Пусть теперь $\{U_{\mu\nu}\} \in \mathfrak{A}_b^0$. Задавшись произвольным числом $\varepsilon > 0$, выберем число L настолько большим, чтобы при $k, l \geq L$ выполнялось неравенство

$$|U'_{kl}| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Тогда из (18), в силу 1° следует

$$|U_{mn}^{kl}| < \varepsilon \quad (k, l \geq L). \quad (19)$$

Если же условие $k, l \geq L$ не выполнено, если, например, $l < L$, то на основании 2° можно выбрать число N так, чтобы для всех $l < L$ имело место неравенство

$$\left| \frac{P_{kl}}{P_{mn}} \right| \leq \sum_{\nu=0}^l \frac{1}{|P_{mn}|} \sum_{\mu=0}^m |p_{\mu\nu}| < \frac{\varepsilon}{K} \quad (m, n \geq N),$$

где $K \geq |U'_{kl}|$ ($k, l = 0, 1, 2, \dots$). Поэтому из (18) вытекает справедливость неравенства (19) также при $l < L$, если $m, n \geq N$. Аналогично рассматривается случай $k < L$.

Тем самым и вторая часть теоремы 4 доказана.

Примечание. Из лемм 2 и 3 следует, что условия 1° и 2° теоремы 4 выполнены, если метод (R, ρ_{mn}) сохраняет класс последовательностей, b -сходящихся к нулю.

2. Одна теорема о среднем значении. В тех случаях, когда установление выполнения условий (16) и (17) непосредственно затруднительно, иногда оказывается полезной следующая теорема о среднем значении, являющаяся распрстранением на двойные последовательности одной теоремы Юрката и Пейеримхоффа [9].

Теорема 5. Если матрица $\mathfrak{A} = (a_{mn\mu\nu})$ удовлетворяет условиям:

$$1^\circ a_{m\eta\mu\nu} \neq 0, \frac{a_{m\eta\mu\nu}}{a_{\mu\nu\eta\nu}} > 0 \quad (0 \leq \mu, \nu \leq m, n),$$

$$2^\circ \Delta_\mu \frac{a_{m\eta\mu\nu}}{a_{k\nu\eta\nu}} \geq 0 \quad (0 \leq \mu < k \leq m), \Delta_\nu \frac{a_{m\eta\mu\nu}}{a_{\mu l\eta\nu}} \geq 0 \quad (0 \leq \nu < l \leq n),$$

$$3^\circ \Delta_{\mu\nu} \frac{a_{m\eta\mu\nu}}{a_{kl\eta\nu}} \geq 0 \quad (0 \leq \mu, \nu < k, l \leq m, n),$$

то справедлива оценка

$$|U_{mn}^{kl}| \leq \frac{a_{mn00}}{a_{ij00}} |U'_{ij}|, \quad (20)$$

где $0 \leq i, j \leq k, l \leq m, n$.

Доказательство. Отметим, прежде всего, что, в силу тождества

$$\frac{a_{mn00}}{a_{kl00}} = \sum_{\mu, \nu=0}^{k-1, l-1} \Delta_{\mu\nu} \frac{a_{m\eta\mu\nu}}{a_{kl\eta\nu}} + \sum_{\mu=0}^{k-1} \Delta_\mu \frac{a_{m\eta\mu l}}{a_{kl\mu l}} + \sum_{\nu=0}^{l-1} \Delta_\nu \frac{a_{mnk\nu}}{a_{klk\nu}} + \frac{a_{mnkl}}{a_{klkl}},$$

из условий теоремы вытекает

$$\frac{a_{mn00}}{a_{kl00}} > 0.$$

Согласно условиям 1° — 3° , при помощи преобразования Абеля-Харди мы находим:

$$\begin{aligned} |U_{mn}^{kl}| &= \left| \sum_{\mu, \nu=0}^{k, l} \frac{a_{m\eta\mu\nu}}{a_{kl\eta\nu}} a_{kl\mu\nu} U_{\mu\nu} \right| \leq \\ &\leq \sum_{\mu, \nu=0}^{k-1, l-1} \Delta_{\mu\nu} \frac{a_{m\eta\mu\nu}}{a_{kl\eta\nu}} |U_{kl}^{\mu\nu}| + \sum_{\mu=0}^{k-1} \Delta_\mu \frac{a_{m\eta\mu l}}{a_{kl\mu l}} |U_{kl}^{\mu l}| + \\ &+ \sum_{\nu=0}^{l-1} \Delta_\nu \frac{a_{mnk\nu}}{a_{klk\nu}} |U_{kl}^{k\nu}| + \frac{a_{mnkl}}{a_{klkl}} |U_{kl}^{kl}|, \end{aligned}$$

откуда, ввиду тождества, приведенного выше, следует

$$|U_{mn}^{kl}| \leq \frac{a_{mn00}}{a_{kl00}} |U_{kl}^{k_1 l_1}|, \quad (21)$$

где k_1, l_1 определяются равенством

$$|U_{kl}^{k_1 l_1}| = \max_{0 \leq \mu, \nu \leq k, l} |U_{kl}^{\mu \nu}|$$

и, следовательно, $0 \leq k_1, l_1 \leq k, l$.

Применив оценку (21) к сумме $U_{kl}^{k_1 l_1}$ и повторив такой процесс s раз, получим вместо (21) оценку

$$|U_{mn}^{kl}| \leq \frac{a_{mn00}}{a_{k_s l_s 00}} |U_{k_s l_s}^{k_{s+1} l_{s+1}}|, \quad (22)$$

причем

$$m, n \geq k, l \geq k_1, l_1 \geq \dots \geq k_s, l_s \geq k_{s+1}, l_{s+1} \geq 0.$$

Ввиду последних соотношений, при некотором s обязательно должно соблюдаться равенство

$$k_s = k_{s+1} = i, l_s = l_{s+1} = j.$$

Вследствие этого, из (22) и вытекает оценка (20).

Применим теорему 5 к методу суммирования Чезаро (C, α, β) [17], элементы матрицы которого определяются формулой

$$a_{mn\mu\nu} = \frac{A_{m-\mu}^{\alpha-1} A_{n-\nu}^{\beta-1}}{A_m^\alpha A_n^\beta}, \quad A_m^\alpha = \binom{\alpha+m}{m}$$

Так как имеем:

$$\Delta_\mu \frac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}} = \frac{(1-\alpha)(m-k)}{(k-\mu)(m-\mu+\alpha-1)} \frac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}},$$

$$\Delta_\nu \frac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}} = \frac{(1-\beta)(n-l)}{(l-\nu)(n-\nu+\beta-1)} \frac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}},$$

$$\Delta_{\mu\nu} \frac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}} = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(m-k)(n-l)}{(k-\mu)(l-\nu)(m-\mu+\alpha-1)(n-\nu+\beta-1)} \frac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}},$$

то при $0 < \alpha, \beta \leq 1$ условия теоремы 5 выполняются и, тем самым, справедлива оценка (20), где

$$\frac{a_{mn00}}{a_{ij00}} = \frac{(\alpha+i)(\beta+j)}{(\alpha+m)(\beta+n)}$$

и, следовательно,

$$\frac{a_{mn00}}{a_{ij00}} \leq 1 \quad (23)$$

Из (20) и (23) заключаем о выполнении условия (16). Покажем, что при $0 < \alpha, \beta \leq 1$ выполнено и условие (17)

В самом деле, пусть $\{U_{\mu\nu}\} \in \mathfrak{A}_b^0$. Задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, можно найти такое J , что для всех $i, j \geq J$

$$|U'_{ij}| < \varepsilon.$$

Тогда из (20), в силу (23), следует

$$|U_{mn}^{kl}| < \varepsilon \quad (i, j \geq J). \quad (24)$$

Если же условие $i, j \geq J$ не соблюдается, например, если $i < J$, то можно выбирать число N так, чтобы для всех $j < J$ имело место неравенство

$$\frac{a_{mn0}}{a_{ij0}} < \frac{\varepsilon}{K} \quad (n \geq N),$$

где $K \geq |U'_{ij}|$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots$). Поэтому из (20) вытекает справедливость неравенства (24) также при $j < J$, если $n \geq N$. Аналогично рассматривается случай $i < J$.

Тем самым установлено выполнение условия (17) при $0 < \alpha, \beta \leq 1$.

При помощи рассуждений, аналогичных тем, которые мы приводили в настоящем пункте, можно проверить выполнение условий (16) и (17) также при $\alpha = 0, 0 < \beta \leq 1$ или $0 < \alpha \leq 1, \beta = 0$ или $\alpha = \beta = 0$. Таким образом, мы пришли к следующему предложению.

Теорема 6. *Метод (C, α, β) удовлетворяет условиям (16) и (17), если $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$.*

§ 5. Множители суммируемости первого рода

1. Точные условия для множителей суммируемости первого рода. Покажем, что необходимые условия для множителей суммируемости первого рода, данные теоремами 2 и 3, являются также достаточными, если ограничиться матрицами \mathfrak{A} , подчиненными условию (16).

Теорема 7 Пусть матрица $\mathfrak{A} = (a_{m\mu\nu})$ удовлетворяет условию (16) и, кроме того,

$$|a_{m\mu\nu}| \leq M_{\mu\nu} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots),$$

¹ Например, для проверки условий (16) и (17) при $\alpha = 0, 0 < \beta \leq 1$ целесообразно доказать аналог теоремы 5 в случае, когда $a_{m\mu\nu} = 0$ при $m \neq n, a_{mnm} \neq 0$. Соответствующая оценка гласит:

$$|U_{mn}^{kl}| \leq \frac{a_{mnm0}}{a_{mjn0}} |U'_{mj}| \quad (0 \leq j \leq l \leq n).$$

а матрица B суммирует (ограниченно суммирует, вполне суммирует) каждый вполне сходящийся ряд к его сумме¹ Тогда условие

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\kappa, \lambda = \mu, \nu}^{\infty} c_{\kappa\lambda} a_{\kappa\lambda\mu\nu}, \quad \sum_{\kappa, \lambda} |c_{\kappa\lambda}| < \infty \quad (25)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были множителями суммируемости типа (\mathfrak{A}_0, B) ((\mathfrak{A}_0, B_0) , (\mathfrak{A}_0, B_r)).

Доказательство. Ввиду теоремы 2, для доказательства теоремы 7 достаточно установить полную сходимость ряда (3) при $\{U_{\mu\nu}\} \in \mathfrak{A}_0$. Ряд (3) сходится (в смысле Прингсхейма), если для каждого заданного $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа K, L , чтобы неравенство

$$|S_{mn} - S_{kl}| < \varepsilon \quad (26)$$

имело место при всех $m, n > k, l \geq K, L$, где

$$S_{kl} = \sum_{\mu, \nu=0}^{k, l} \varepsilon_{\mu\nu} U_{\mu\nu}$$

Мы имеем:

$$S_{mn} - S_{kl} = \sum_{\mu, \nu=0, l+1}^{m, n} \varepsilon_{\mu\nu} U_{\mu\nu} + \sum_{\mu, \nu=k+1, 0}^{m, l} \varepsilon_{\mu\nu} U_{\mu\nu} = I + II. \quad (27)$$

Из (25) и (16) следует:

$$|I| = \left| \sum_{\kappa, \lambda=0, l+1}^{\infty} c_{\kappa\lambda} \sum_{\mu, \nu=0, l+1}^{m', n'} a_{\kappa\lambda\mu\nu} U_{\mu\nu} \right| = \left| \sum_{\kappa, \lambda=0, l+1}^{\infty} c_{\kappa\lambda} (U_{\kappa\lambda}^{m'n'} - U_{\kappa\lambda}^{m'l}) \right| \leq$$

$$\leq 2M_0 \sum_{\kappa, \lambda=0, l+1}^{\infty} |c_{\kappa\lambda}| \quad (m' = \min \kappa, m', n' = \min(\lambda, n)),$$

$$|II| = \left| \sum_{\kappa, \lambda=k+1, 0}^{\infty} c_{\kappa\lambda} \sum_{\mu, \nu=k+1, 0}^{m', l'} a_{\kappa\lambda\mu\nu} U_{\mu\nu} \right| = \left| \sum_{\kappa, \lambda=k+1, 0}^{\infty} c_{\kappa\lambda} (U_{\kappa\lambda}^{m'l'} - U_{\kappa\lambda}^{kl'}) \right| \leq$$

$$\leq 2M_0 \sum_{\kappa, \lambda=k+1, 0}^{\infty} |c_{\kappa\lambda}| \quad (l' = \min(\lambda, l)).$$

¹ См. лемму 4.

Отсюда, на основании (27), и заключаем о выполнении неравенства (26).

Существование предела $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{kl}$ вытекает из соотношения

$$|S_{ml} - S_{kl}| = \left| \sum_{\mu, \nu=k+1, 0}^{m, l} \varepsilon_{\mu\nu} U_{\mu\nu} \right| = |\Pi| < \varepsilon,$$

если $k \geq K$. Аналогично доказывается существование предела $\lim_{j \rightarrow \infty} S_{kj}$.

Тем самым теорема 7 доказана.

Имеет место и следующая теорема, справедливость которой без труда вытекает из теорем 3 и 7

Теорема 8. Пусть матрица $\mathfrak{A} = (a_{mn\mu\nu})$ удовлетворяет условию¹ (16) и, кроме того,

$$b\text{-}\lim_{m, n \rightarrow \infty} a_{mn\mu\nu} = 0,$$

а матрица B суммирует (ограниченно суммирует, вполне суммирует) каждый вполне сходящийся ряд к его сумме. Тогда условие (25) является необходимым и достаточным для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были множителями суммируемости типа (\mathfrak{A}_b, B) $((\mathfrak{A}_b, B_b), (\mathfrak{A}_b, B_\tau))$.

2. Применение к методу взвешенных средних арифметических. Согласно теореме 4, для метода (R, p_{mn}) условие (16) выполнено, если

$$|P_{kl}| \leq M |P_{mn}| \quad (k, l \leq m, n). \quad (28)$$

Отсюда вытекает и второе предположение теоремы 7, касающееся матрицы \mathfrak{A} .

Условие (25) в рассматриваемом случае гласит:

$$\frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = \sum_{\kappa, \lambda=\mu, \nu}^{\infty} \frac{c_{\kappa\lambda}}{P_{\kappa\lambda}}, \quad \sum_{\kappa, \lambda} |c_{\kappa\lambda}| < \infty. \quad (29)$$

Формула (29) дает возможность найти все последовательности $\{\varepsilon_{\mu\nu}\}$ множителей суммируемости рассматриваемого типа. Но часто перед нами стоит обратная задача, где требуется решение следующего вопроса: является ли заданная последовательность $\{\varepsilon_{\mu\nu}\}$ последовательностью множителей суммируемости рассматриваемого типа или нет. Чтобы найти возможность решения по-

¹ Достаточно выполнение неравенства (16) при $\{U_{\mu\nu}\} \in \mathfrak{A}_b$.

ставленной задачи, видоизменим условие (29), исключая из него величины $c_{\kappa\lambda}$.

Ввиду условия (28), ряд, стоящий в правой части формулы (29), сходится абсолютно. Поэтому из (29), с одной стороны, следует

$$\Delta_{\mu\nu} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\rho_{\mu\nu}} = \frac{c_{\mu\nu}}{\rho_{\mu\nu}},$$

откуда

$$\sum_{\mu, \nu} \left| P_{\mu\nu} \Delta_{\mu\nu} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\rho_{\mu\nu}} \right| < \infty \quad (30)$$

и, с другой стороны,

$$r\text{-}\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\rho_{\mu\nu}} = 0. \quad (31)$$

Покажем, что из условий (30) и (31) вытекает, наоборот, условие (29). В самом деле, обозначив

$$\Delta_{\kappa\lambda} \frac{\varepsilon_{\kappa\lambda}}{\rho_{\kappa\lambda}} = \frac{c_{\kappa\lambda}}{\rho_{\kappa\lambda}},$$

где, в силу (30), $\sum_{\kappa, \lambda} |c_{\kappa\lambda}| < \infty$, и двукратно применив формулу

$$d_\mu = \sum_{\kappa=\mu}^{\infty} \Delta_\kappa d_\kappa \quad (\lim_{\mu \rightarrow \infty} d_\mu = 0),$$

что допустимо ввиду (31), получим условие (29).

Тем самым, из теорем 7 и 8 заключаем справедливость следующего предложения.

Теорема 9. Пусть \mathfrak{R} — матрица метода (R, ρ_{mn}) , удовлетворяющая условию (28), а B — произвольная матрица, которая суммирует (ограниченно суммирует, вполне суммирует) каждый вполне сходящийся ряд к его сумме. Тогда условия

$$1^\circ \sum_{\mu, \nu} \left| P_{\mu\nu} \Delta_{\mu\nu} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\rho_{\mu\nu}} \right| < \infty,$$

$$2^\circ r\text{-}\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\rho_{\mu\nu}} = 0$$

необходимы и достаточны для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ служили множителями суммируемости типа (\mathfrak{R}_0, B) ((\mathfrak{R}_0, B_b) , (\mathfrak{R}_0, B_r))

Если, кроме того, матрица \mathfrak{R} удовлетворяет условию $\lim_{m, n \rightarrow \infty} P_{mn} =$

$= \infty$, то условия 1° и 2° необходимы и достаточны также для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были множителями суммируемости типа (\mathfrak{R}_b, B) $((\mathfrak{R}_b, B_b), (\mathfrak{R}_b, B_r))$.

3. Применение к методу Чезаро. Согласно теореме 6, для метода (C, α, β) предположения теорем 7 и 8, касающиеся матрицы \mathfrak{A} , удовлетворяются, если $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, причем условие (25) гласит:

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\kappa, \lambda = \mu, \nu}^{\infty} c_{\kappa\lambda} \frac{A^{\alpha-1} A^{\beta-1} x^{-\mu} \lambda^{-\nu}}{A_{\kappa}^{\alpha} A_{\lambda}^{\beta}}, \quad \sum_{\kappa, \lambda} |c_{\kappa\lambda}| < \infty. \quad (32)$$

Остается исключить из (32) величины $c_{\kappa\lambda}$.

Определим разности $\Delta_{\mu}^{\alpha} \varepsilon_{\mu\nu}$ и $\Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu}$ формулами

$$\Delta_{\mu}^{\alpha} \varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\kappa = \mu}^{\infty} A_{\kappa - \mu}^{-\alpha-1} \varepsilon_{\kappa\nu},$$

$$\Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\kappa, \lambda = \mu, \nu}^{\infty} A_{\kappa - \mu}^{-\alpha-1} A_{\lambda - \nu}^{-\beta-1} \varepsilon_{\kappa\lambda}.$$

Ряды, стоящие в правой части этих формул, в силу ограниченности величин $\varepsilon_{\mu\nu}$, вытекающей из (32), абсолютно сходятся, вследствие чего справедливо соотношение

$$\Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu} = \Delta_{\mu}^{\alpha} (\Delta_{\nu}^{\beta} \varepsilon_{\mu\nu}).$$

Воспользовавшись формулой

$$\sum_{k, l = 0}^{\kappa - \mu, \lambda - \nu} A_k^{-\alpha-1} A_{\kappa - \mu - k}^{\alpha-1} A_l^{-\beta-1} A_{\lambda - \nu - l}^{\beta-1} = \delta_{\kappa\lambda\mu\nu},$$

из (32), после несложных вычислений, мы найдем:

$$\Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu} = \frac{c_{\mu\nu}}{A_{\mu}^{\alpha} A_{\nu}^{\beta}},$$

откуда

$$\sum_{\mu, \nu} |A_{\mu}^{\alpha} A_{\nu}^{\beta} \Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu}| < \infty \quad (33)$$

Кроме того, из (32) следует

$$r\text{-}\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} \varepsilon_{\mu\nu} = 0. \quad (34)$$

Покажем, что условия (33) и (34) влекут за собой, наоборот, условие (32). Для этого используем следующую лемму, принадлежащую Андерсену и передоказанную Бозанкет [2]:

Если $\lim_{\mu \rightarrow \infty} d_\mu = 0$ и числа a_1, a_2 удовлетворяют условиям $a_1 \geq 0, a_2 \geq -1, a_1 + a_2 \geq 0$, то разности

$$\Delta_\mu^{\alpha_1 + \alpha_2} d_\mu \quad \text{и} \quad \Delta_\mu^{\alpha_2} (\Delta_\mu^{\alpha_1} d_\mu)$$

существуют и равны друг другу.

Обозначив

$$\Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu} = \Delta_\mu^\alpha (\Delta_\nu^\beta \varepsilon_{\mu\nu}) = \frac{c_{\mu\nu}}{A_\mu^\alpha A_\nu^\beta},$$

где, в силу (33), $\sum_{\mu, \nu} |c_{\mu\nu}| < \infty$, и применив лемму Андерсена (относительно μ) при $a_1 = \alpha, a_2 = -\alpha$, что допустимо ввиду (34), мы получим:

$$\Delta_\nu^\beta \varepsilon_{\mu\nu} = \Delta_\mu^{-\alpha} \frac{c_{\mu\nu}}{A_\mu^\alpha A_\nu^\beta}$$

Отсюда, применив еще раз лемму Андерсена (относительно ν) при $a_1 = \beta, a_2 = -\beta$, мы найдем:

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \Delta_\nu^{-\beta} \left(\Delta_\mu^{-\alpha} \frac{c_{\mu\nu}}{A_\mu^\alpha A_\nu^\beta} \right),$$

откуда и следует (32)

Теперь мы можем сформулировать следующее предложение, вытекающее из теорем 7, 8 и из асимптотической формулы

$$A_\mu^\alpha \sim \frac{(\mu+1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Теорема 10. Пусть \mathfrak{L} — матрица метода (C, α, β) , $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, а B — произвольная матрица, которая суммирует (ограниченно суммирует, вполне суммирует) каждый вполне сходящийся ряд к его сумме. Тогда условия

$$1^\circ \sum_{\mu, \nu} (\mu+1)^\alpha (\nu+1)^\beta \left| \Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu} \right| < \infty,$$

$$2^\circ r\text{-}\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} \varepsilon_{\mu\nu} = 0$$

необходимы и достаточны для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ служили множителями суммируемости типов (\mathfrak{L}_0, B) $((\mathfrak{L}_0, B_b), (\mathfrak{L}_0, B_r))$ или (\mathfrak{L}_b, B) $((\mathfrak{L}_b, B_b), (\mathfrak{L}_b, B_r))$.

§ 6. Добавочные необходимые условия для множителей суммируемости второго рода

1. Метод нахождения добавочных необходимых условий. В § 3 установлены основные необходимые условия, не зависящие от матрицы B , для множителей суммируемости первого и второго родов. Оказывается, что для того, чтобы получать точные условия для множителей суммируемости второго рода, к основным необходимым условиям нужно прибавить еще некоторые добавочные необходимые условия, существенно зависящие от B . Изложим метод для вывода этих добавочных условий.

Будем рассматривать множители суммируемости типа (A', B') , где по-прежнему A' — класс рядов, преобразующихся нормальной матрицей $A = (a_{m\eta\nu\lambda})$ в последовательности данного класса \mathfrak{Q}' , а B' — один из классов B_-, B_b- или B_r- суммируемых рядов. В дальнейшем будем предполагать матрицу B треугольной.

При помощи (8) легко вывести соотношение

$$\sum_{\kappa, \lambda=0}^{m, n} \beta_{m\eta\kappa\lambda} \varepsilon_{\kappa\lambda} U_{\kappa\lambda} = \sum_{\kappa, \lambda=0}^{m, n} d_{m\eta\kappa\lambda} U'_{\kappa\lambda}, \quad (35)$$

где

$$d_{m\eta\kappa\lambda} = \sum_{\mu\nu=\kappa, \lambda}^{m, n} \beta_{m\eta\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu\kappa\lambda} \quad (36)$$

Из (35) следует, что для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ служили множителями суммируемости типа (A', B') , необходимо и достаточно, чтобы матрица $(d_{m\eta\kappa\lambda})$ суммировала (ограниченно суммировала, вполне суммировала) все последовательности класса \mathfrak{Q}'

Обозначим через \mathfrak{Q}''' подкласс класса \mathfrak{Q}' , состоящий из последовательностей $\{U'_{\kappa\lambda}\}$ класса \mathfrak{Q}' удовлетворяющих условиям

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\kappa=0}^m d_{m\eta\kappa\lambda} U'_{\kappa\lambda} = \sum_{\kappa} d'_{\kappa\lambda} U'_{\kappa\lambda} \quad (\lambda \geq N),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda=0}^n d_{\eta n\kappa\lambda} U'_{\kappa\lambda} = \sum_{\lambda} d''_{\kappa\lambda} U'_{\kappa\lambda} \quad (\kappa \geq N)$$

для каждой матрицы $(d_{m\eta\kappa\lambda})$, которая суммирует все последовательности класса \mathfrak{Q}' и при которой существуют пределы

$$d'_{\kappa\lambda} = \lim_{m \rightarrow \infty} d_{m\eta\kappa\lambda} \quad (\lambda \geq N), \quad d''_{\kappa\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{\eta n\kappa\lambda} \quad (\kappa \geq N). \quad (37)$$

¹ Не обязательно из всех.

Предположим, с одной стороны, что класс \mathfrak{Q}'' содержит все последовательности $\{a_{\kappa\lambda\mu\nu}\}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$) и, с другой стороны, что существуют пределы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_{m\nu\mu\nu} = \beta'_\nu, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{\mu n\mu\nu} = \beta''_\mu, \quad (38)$$

причем β'_ν не зависит от μ , а β''_μ не зависит от ν . Тогда при $U_{\kappa\lambda} = \delta_{\kappa\lambda\mu\nu}$, т. е. при $u_{\kappa\lambda} = \overline{\Delta}_{\kappa\lambda} \delta_{\kappa\lambda\mu\nu}$ из (35) найдем:

$$\Delta_{\mu\nu} (\beta_{m\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}) = \sum_{\kappa, \lambda = \mu, \nu}^{m, n} d_{m\kappa\lambda} a_{\kappa\lambda\mu\nu},$$

откуда, в частности, при $n = \nu$, $m \rightarrow \infty$, соответственно при $m = \mu$, $n \rightarrow \infty$ получим:

$$\beta'_\nu \Delta_\mu \varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\kappa = \mu}^{\infty} d'_{\kappa\nu} a_{\kappa\nu\mu\nu} \quad (\nu \geq N), \quad (39)$$

$$\beta''_\mu \Delta_\nu \varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\lambda = \nu}^{\infty} d''_{\mu\lambda} a_{\mu\lambda\mu\nu} \quad (\mu \geq N). \quad (40)$$

Таким образом, оказывается справедливым следующее предложение.

Теорема 11. Пусть определенный выше подкласс \mathfrak{Q}'' класса \mathfrak{Q}' содержит все двойные последовательности $\{a_{\kappa\lambda\mu\nu}\}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$), а матрица B удовлетворяет условию (38). Если, сверх того, существуют пределы ¹ (37), то для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были множителями суммируемости типа (A', B') , необходимо выполнение условий (39) и (40), где матрица $(d_{m\mu\nu})$ суммирует (ограниченно суммирует, вполне суммирует) все последовательности класса \mathfrak{Q}' .

2. Добавочные необходимые условия в случаях $A' = A_0$ и $A' = A_b$. Применим теорему 11 к множителям суммируемости типов (A_0, B') и (A_b, B') . Здесь классом \mathfrak{Q}' является класс ограниченных, соответственно b -сходящихся последовательностей. Поскольку матрица $(d_{m\mu\nu})$ суммирует все последовательности класса \mathfrak{Q}' , то она должна удовлетворять условиям леммы 1, соответственно 2. Согласно условию 1° этих лемм, имеем:

$$\sum_{\kappa, \lambda = 0}^{m, n} |d_{m\kappa\lambda}| \leq M \quad (m, n \geq N),$$

¹ В случае $B' = B_r$ пределы (37) обязательно существуют.

откуда

$$\sum_{x=0}^m |d_{m\lambda x\lambda}| \leq M^x \quad (\lambda \geq N), \quad \sum_{\lambda=0}^n |d_{x\lambda n\lambda}| \leq M_x \quad (x \geq N)$$

для всех $m, n = 0, 1, 2, \dots$. Теперь, на основании известной теоремы Кожима-Шура [18] из теории простых рядов, нетрудно убедиться, что в качестве подкласса \mathfrak{Q}''' в обоих рассматриваемых случаях можно взять класс последовательностей $\{U'_{x\lambda}\} \in \mathfrak{Q}'$, при которых ¹

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U'_{x\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} U'_{x\lambda} = 0.$$

Чтобы установить условия, которым должны удовлетворять коэффициенты $d'_{x\lambda}$ и $d''_{x\lambda}$, рассмотрим отдельно случаи $A' = A_0$ и $A' = A_b$.

1) В случае $A' = A_0$, задавшись $\varepsilon > 0$, согласно условию 2° леммы 1 можно найти такое $N' \geq N$, чтобы для произвольного фиксированного $k < m$ было

$$\sum_{\mu, \nu=0}^{k, n} |d_{m\mu\nu} - d_{\mu\nu}| < \varepsilon \quad (d_{\mu\nu} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} d_{m\mu\nu}),$$

если $m, n \geq N'$. Отсюда при $\nu = n$ и $m \rightarrow \infty$ вытекает

$$\sum_{\mu=0}^k |d'_{\mu\nu} - d_{\mu\nu}| \leq \varepsilon,$$

если $\nu \geq N'$. Следовательно ²,

$$\lim_{\substack{\nu \rightarrow \infty \\ \nu \geq N}} \sum_{\mu} |d'_{\mu\nu} - d_{\mu\nu}| = 0.$$

Но, поскольку в силу условия 1° леммы 1 $\sum_{\mu, \nu} |d_{\mu\nu}| < \infty$, то

¹ Достаточно рассматривать последовательности $\{U'_{x\lambda}\} \in \mathfrak{Q}'$, удовлетворяющие условию $\lim_{x \rightarrow \infty} U'_{x\lambda} = 0 \quad (\lambda \geq N), \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} U'_{x\lambda} = 0 \quad (x \geq N)$.

² Символ

$$\lim_{\substack{\nu \rightarrow \infty \\ \nu \geq N}} S_\nu = 0$$

означает, что S_ν существует при $\nu \geq N$ и

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} S_\nu = 0.$$

$$\lim_{\substack{\nu \rightarrow \infty \\ \nu \geq N}} \sum_{\mu} |d'_{\mu\nu}| = 0$$

Аналогично доказывается справедливость соотношения

$$\lim_{\substack{\mu \rightarrow \infty \\ \mu \geq N}} \sum_{\nu} |d''_{\mu\nu}| = 0.$$

2) В случае $A' = A_b$, согласно условию 1° леммы 2, для произвольного фиксированного $k < m$ мы имеем:

$$\sum_{\mu, \nu=0}^{k, n} |d_{mn\mu\nu}| \leq M \quad (m, n \geq N),$$

откуда при $\nu = n$ и $m \rightarrow \infty$ вытекает

$$\sum_{\mu=0}^k |d'_{\mu\nu}| \leq M \quad (\nu \geq N)$$

и, следовательно,

$$\sum_{\mu} |d'_{\mu\nu}| \leq M \quad (\nu \geq N).$$

Кроме того, из условия 2° леммы 2, в частности, следует

$$\lim_{m, \nu \rightarrow \infty} |d_{m\nu\nu} - d_{\mu\nu}| = 0,$$

откуда

$$\lim_{m, \nu \rightarrow \infty} d_{m\nu\nu} = 0,$$

так как $\lim_{\nu \rightarrow \infty} d_{\mu\nu} = 0$. Но поскольку существует предел

$$d'_{\mu\nu} = \lim_{m \rightarrow \infty} d_{m\nu\nu} \quad (\nu \geq N),$$

то имеем:

$$\lim_{\substack{\nu \rightarrow \infty \\ \nu \geq N}} d'_{\mu\nu} = 0.$$

Аналогично устанавливается справедливость условий

$$\sum_{\nu} |d''_{\mu\nu}| \leq M \quad (\mu \geq N), \quad \lim_{\substack{\mu \rightarrow \infty \\ \mu \geq N}} d''_{\mu\nu} = 0.$$

Теперь из теоремы 11 без труда получаются следующие предложения.

Теорема 12. Пусть матрица $\mathfrak{X} = (a_{m\eta\nu})$ удовлетворяет условию

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{m\eta\nu} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m\eta\nu} = 0,$$

а матрица B — условию (38). Если, сверх того, существуют пределы (37), то для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были множителями суммируемости типа (A_0, B') , необходимо выполнение условий (39) и (40), причем¹

$$\lim_{\substack{\nu \rightarrow \infty \\ \nu \geq N}} \sum_{\mu} |d'_{\mu\nu}| = \lim_{\substack{\mu \rightarrow \infty \\ \mu \geq N}} \sum_{\nu} |d''_{\mu\nu}| = 0.$$

Теорема 13. Пусть матрица $\mathfrak{X} = (a_{m\eta\nu})$ удовлетворяет условию

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{m\eta\nu} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m\eta\nu} = 0,$$

а матрица B — условию (38). Если, сверх того, существуют пределы (37), то для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были множителями суммируемости типа (A_b, B') , необходимо выполнение условий (39) и (40), причем²

$$\sum_{\mu} |d'_{\mu\nu}| \leq M, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} d'_{\mu\nu} = 0 \quad (\nu \geq N).$$

$$\sum_{\nu} |d''_{\mu\nu}| \leq M, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} d''_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \geq N).$$

3. В заключение приводим еще одно необходимое условие для множителей суммируемости типа (A', B') . Это условие получается из факта, что матрица $(d_{m\eta\nu})$ должна суммировать (ограниченно суммировать, вполне суммировать) все последовательности класса \mathfrak{X}' . Этот факт применяется к элементам $d_{\mu\nu\nu}$, которые, согласно (36), выражаются формулой

$$d_{\mu\nu\nu} = \beta_{\mu\nu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu\nu}$$

или, в силу (11),

$$d_{\mu\nu\nu} = \frac{\beta_{\mu\nu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}}{a_{\mu\nu\nu}} \quad (41)$$

Таким образом, для рассматриваемых нами типов множите-

¹ Согласно лемме 1, в случаях $B' = B_b$ и $B' = B_r$ имеем $N = 0$.

² Согласно лемме 2, в случаях $B' = B_b$ и $B' = B_r$ имеем $N = 0$.

лей суммируемости второго рода при помощи лемм 1 и 2 нетрудно установить следующие необходимые условия:

$$(A_o, B): \lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} d_{\mu\nu\mu\nu} = 0, \quad (42^a)$$

$$(A_o, B_b): b\text{-}\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} d_{\mu\nu\mu\nu} = 0, \quad (42^b)$$

$$(A_o, B_r): r\text{-}\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} d_{\mu\nu\mu\nu} = 0, \quad (42^c)$$

$$(A_b, B): |d_{\mu\nu\mu\nu}| \leq M \quad (\mu, \nu \geq N), \quad (43^a)$$

$$(A_b, B_b) \quad |d_{\mu\nu\mu\nu}| \leq M \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots), \quad (43^b)$$

$$(A_b, B_r) : \begin{cases} |d_{\mu\nu\mu\nu}| \leq M \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots) \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} d_{\mu\nu\mu\nu} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} d_{\mu\nu\mu\nu} = 0, \end{cases} \quad (43^c)$$

где $d_{\mu\nu\mu\nu}$ дается формулой (41).

Ограничимся доказательством условий (43^a)—(43^c). Условия (43^a), (43^b) и первая часть условия (43^c) непосредственно вытекают из условия 1° леммы 2. В случае с) условие 2° леммы 2 дает:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^m |d_{m\nu\mu\nu} - d'_{\mu\nu}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n |d_{\mu n\mu\nu} - d''_{\mu\nu}| = 0, \quad (44)$$

где $d'_{\mu\nu}$ и $d''_{\mu\nu}$ определяются формулами (37) при $N = 0$. Из (44), в частности, следует

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |d_{m\nu\mu\nu} - d'_{\mu\nu}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |d_{\mu n\mu\nu} - d''_{\mu\nu}| = 0,$$

откуда и получается вторая часть условия (43^c). если иметь в виду, что, в силу сходимости рядов

$$\sum_{\mu} |d'_{\mu\nu}|, \quad \sum_{\nu} |d''_{\mu\nu}|,$$

вытекающей из условия 1° леммы 2, мы имеем:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} d'_{\mu\nu} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} d''_{\mu\nu} = 0.$$

Задачу, стоящую перед нами, можно теперь сформулировать следующим образом: в каких случаях необходимые условия, данные теоремами 2, 3, 12, 13, являются, вместе с соответствующими условиями (42^a)—(42^c) и (43^a)—(43^c), также достаточными для множителей суммируемости типов (A_o, B') и (A_b, B') . В следующем параграфе мы решим поставленную задачу в случае множителей сходимости.

§ 7. Точные условия для множителей сходимости второго рода

1. Множители сходимости для A_0 . Если B представляет собой матрицу метода сходимости, то предположения теорем 2, 3, 12 и 13, относящиеся к матрице B , выполнены, причем имеем $\beta'_\nu = \beta''_\nu = 1$. Наложив на матрицу \mathfrak{A} ограничение (16), докажем следующее предложение.

Теорема 14. Пусть для матрицы $\mathfrak{A} = (a_{m\mu\nu})$ соблюдается условие (16) и, кроме того,

$$\begin{aligned} |a_{m\mu\nu}| &\leq M_{\mu\nu} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m\mu\nu} &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m\mu\nu} = 0. \end{aligned}$$

Если существуют пределы (37), то для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были относительно A_0 множителями: а) сходимости, б) b -сходимости, с) r -сходимости, необходимо и достаточно выполнение следующих условий¹:

$$1^\circ \Delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=\mu, \nu}^{\infty} c_{\lambda} a_{\lambda\mu\nu}, \quad \sum_{\lambda} |c_{\lambda}| < \infty,$$

$$2^\circ \Delta_{\mu} \varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=\mu}^{\infty} d'_{\lambda\nu} a_{\lambda\nu\mu} \quad (\nu \geq N), \quad \lim_{\substack{\nu \rightarrow \infty \\ \nu \geq N}} \sum_{\lambda} |d'_{\lambda\nu}| = 0,$$

$$2^\circ \Delta_{\nu} \varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=\nu}^{\infty} d''_{\mu\lambda} a_{\mu\lambda\nu} \quad (\mu \geq N), \quad \lim_{\substack{\mu \rightarrow \infty \\ \mu \geq N}} \sum_{\lambda} |d''_{\mu\lambda}| = 0,$$

$$4^\circ \text{ а) } \lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{a_{\mu\nu\mu\nu}} = 0, \quad \text{ б) } b\text{-}\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{a_{\mu\nu\mu\nu}} = 0, \quad \text{ с) } r\text{-}\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{a_{\mu\nu\mu\nu}} = 0.$$

Доказательство. Необходимость условий 1°—4° вытекает из теорем 2, 12 и из условий (42^а)—(42^с). Для доказательства достаточности условий 1°—4° исходим из получаемого при помощи преобразования Абеля-Харди соотношения

$$\sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} \varepsilon_{\mu\nu} u_{\mu\nu} = \text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV}, \quad (45)$$

¹ В случаях б) и с) имеем $N = 0$. В случае с), кроме того, существование пределов (37) необходимо.

где

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{\substack{\mu, \nu=0 \\ n-1}}^{m-1, n-1} (\Delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}) U_{\mu\nu}, & II &= \sum_{\mu=0}^{m-1} (\Delta_{\mu} \varepsilon_{\mu n}) U_{\mu n}, \\
 III &= \sum_{\nu=0}^{n-1} (\Delta_{\nu} \varepsilon_{m\nu}) U_{m\nu}, & IV &= \varepsilon_{mn} U_{mn}.
 \end{aligned}$$

В силу условия 1° из теоремы 7 (при $B_r = r$ -сходимость) следует полная сходимость выражения I. Далее, ввиду условий 2° и (16), при $n \geq N$ мы находим:

$$\begin{aligned}
 |II| &= \left| \sum_{\kappa} d'_{\kappa n} \sum_{\mu=0}^{m'} a_{\kappa n \mu n} U_{\mu n} \right| \leq \sum_{\kappa} |d'_{\kappa n}| \left| U_{\kappa n}^{m, n} - U_{\kappa n}^{m', n-1} \right| \leq \\
 &\leq 2 M_0 \sum_{\kappa} |d'_{\kappa n}|,
 \end{aligned}$$

где $m' = \min(\kappa, m - 1)$. Отсюда вытекает

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} II = \lim_{n \rightarrow \infty} II = 0.$$

Сверх того, поскольку для любого натурального числа p при $n \geq N$ имеем:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{\mu=m}^{m+p} (\Delta_{\mu} \varepsilon_{\mu n}) U_{\mu n} \right| &= \left| \sum_{\kappa=m}^{\infty} d'_{\kappa n} \sum_{\mu=m}^{m''} a_{\kappa n \mu n} U_{\mu n} \right| \leq \\
 &\leq 4 M_0 \sum_{\kappa=m}^{\infty} |d'_{\kappa n}| \quad (m'' = \min(\kappa, m + p)),
 \end{aligned}$$

то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} II = 0 \quad (n \geq N).$$

Аналогично доказывается, что

$$\begin{aligned}
 \lim_{m, n \rightarrow \infty} III &= \lim_{m \rightarrow \infty} III = 0, \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} III &= 0 \quad (m \geq N).
 \end{aligned}$$

Наконец, так как

$$a_{mnmn} U_{mn} = U_{mn}^{mn} - U_{mn}^{m, n-1} - U_{mn}^{m-1, n} + U_{mn}^{m-1, n-1}, \quad (46)$$

то, в силу (16), имеем:

$$|IV| = \left| \frac{\varepsilon_{mn}}{a_{mnmn}} \right| |a_{mnmn} U_{mn}| \leq 4 \cdot M_0 \left| \frac{\varepsilon_{mn}}{a_{mnmn}} \right|,$$

откуда, ввиду условия 4°, следует:

$$\text{a) } \lim_{m,n \rightarrow \infty} IV = 0, \quad \text{b) } b\text{-}\lim_{m,n \rightarrow \infty} IV = 0, \quad \text{c) } r\text{-}\lim_{m,n \rightarrow \infty} IV = 0.$$

Теперь, ввиду сноски на стр. 31, из (45) вытекает: а) сходимость, б) b -сходимость, в) r -сходимость ряда (4) при $\{U_{\mu\nu}\} \in \mathfrak{A}_0$, чем и совершается доказательство теоремы 14.

Примечание. Предположения теоремы 14 выполнены, если \mathfrak{A} является матрицей метода сходимости, т. е., если $a_{m\mu n\nu} = \delta_{m\mu n\nu}$. Тогда из условий 1°—4° теоремы 14 мы получаем:

$$1^\circ \sum_{\mu, \nu} \left| \Delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \right| < \infty,$$

$$2^\circ \lim_{\substack{\nu \rightarrow \infty \\ \nu \geq N}} \sum_{\mu} \left| \Delta_{\mu} \varepsilon_{\mu\nu} \right| = 0,$$

$$3^\circ \lim_{\substack{\mu \rightarrow \infty \\ \mu \geq N}} \sum_{\nu} \left| \Delta_{\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \right| = 0,$$

$$4^\circ \text{ a) } \lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} \varepsilon_{\mu\nu} = 0, \quad \text{b) } b\text{-}\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} \varepsilon_{\mu\nu} = 0, \quad \text{c) } r\text{-}\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} \varepsilon_{\mu\nu} = 0.$$

Из условий 2° 3°, 4° а) и 4° б) следует, что условие 4° в) оказывается необходимым также в случаях а) и б). Далее, на основании формул

$$\Delta_{\mu} \varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=\nu}^{\infty} \Delta_{\mu\lambda} \varepsilon_{\mu\lambda}, \quad \Delta_{\nu} \varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\kappa=\mu}^{\infty} \Delta_{\kappa\nu} \varepsilon_{\kappa\nu}.$$

справедливых в силу 4° в), условия 2° и 3° оказываются следствиями из 1°

Тем самым, из теоремы 14, в частности, вытекает известное предложение [19], по которому ряд (4) сходится, ограниченно сходится или вполне сходится для всех рядов (1) с ограниченными частными суммами тогда и только тогда, когда соблюдаются условия 1° и 4° в).

2. Множители сходимости для A_b .

Теорема 15. Пусть для матрицы $X = (a_{mn\mu\nu})$ соблюдается условие (17) и, кроме того,

$$r\text{-}\lim_{m, n \rightarrow \infty} a_{mn\mu\nu} = 0 \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b\text{-}\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} a_{mn\mu\nu} = 1.$$

Если существуют пределы (37), то для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были относительно A_b множителями: а) сходимости, б) b -сходимости, в) r -сходимости, необходимо и достаточно выполнение следующих условий¹:

$$1^\circ \Delta_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\kappa, \lambda=\mu, \nu}^{\infty} c_{\kappa\lambda} a_{\kappa\lambda\mu\nu}, \quad \sum_{\kappa, \lambda} |c_{\kappa\lambda}| < \infty,$$

$$2^\circ \Delta_{\mu}\varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\kappa=\mu}^{\infty} d'_{\kappa\nu} a_{\kappa\nu\mu\nu}, \quad \sum_{\kappa} |d'_{\kappa\nu}| \leq M, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} d'_{\kappa\nu} = 0 \quad (\nu \geq N),$$

$$3^\circ \Delta_{\nu}\varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=\nu}^{\infty} d''_{\mu\lambda} a_{\mu\lambda\nu\nu}, \quad \sum_{\lambda} |d''_{\mu\lambda}| \leq M, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} d''_{\mu\lambda} = 0 \quad (\mu \geq N),$$

$$4^\circ \text{ а) } \left| \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{a_{\mu\nu\mu\nu}} \right| \leq M \quad (\mu, \nu \geq N), \quad \text{б) а) при } N=0,$$

$$\text{в) б) и } \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{a_{\mu\nu\mu\nu}} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{a_{\mu\nu\mu\nu}} = 0.$$

Доказательство. Необходимость условий 1°—4° вытекает из теорем 3, 13 и из условий (43^а)—(43^в). Для доказательства достаточности условий 1°—4° используем опять соотношение (45).

В силу условия 1°, из теоремы 8 (при $B_r = r$ -сходимость) следует полная сходимость выражения I. Далее, ввиду условия 2°, при $n \geq N$ мы находим:

$$\begin{aligned} |II| &= \left| \sum_{\kappa} d'_{\kappa n} \sum_{\mu=0}^{m'} a_{\kappa n \mu n} U_{\mu n} \right| \leq \\ &\leq \sum_{\kappa=0}^{k-1} |d'_{\kappa n} \sum_{\mu=0}^{m'} a_{\kappa n \mu n} U_{\mu n}| + \sum_{\kappa=k}^{\infty} |d'_{\kappa n} \sum_{\mu=0}^{m'} a_{\kappa n \mu n} U_{\mu n}|, \end{aligned}$$

¹ См. сноску на стр. 31.

причем k фиксируем так, чтобы, согласно (17), для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ имело место неравенство

$$\left| \sum_{\mu=0}^{m'} a_{\kappa n \mu n} U_{\mu n} \right| = |U_{\kappa n}^{m' n} - U_{\kappa n}^{m', n-1}| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

для $\kappa, n \geq k \geq N$. Тогда на основании условия 2° при $n \geq N_0$ будем иметь:

$$|\Pi| \leq 2M_0 \sum_{\kappa=0}^{k-1} |d'_{\kappa n}| + \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{\kappa=k}^{\infty} |d'_{\kappa n}| < \varepsilon,$$

если выберем число $N_0 \geq k$ настолько большим, чтобы было

$$\sum_{\kappa=0}^{k-1} |d'_{\kappa n}| < \frac{\varepsilon}{4M_0} \text{ при } n \geq N_0,$$

где

$$M_0 \geq |U_{mn}^{kl}|, \text{ если } \{U_{\mu\nu}\} \in \mathfrak{A}_b^0.$$

Следовательно,

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \Pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi = 0.$$

Так же, как при доказательстве теоремы 14, можно убедиться, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Pi = 0 \quad (n \geq N).$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \text{III} = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{III} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{III} = 0 \quad (m \geq N).$$

Наконец, ввиду (46), из (17) вытекает

$$b\text{-}\lim_{m, n \rightarrow \infty} a_{mnmn} U_{mn} = 0.$$

Отсюда, в силу условия 4° и неравенств

$$|\text{IV}| \leq M |a_{mnmn} U_{mn}| \quad (m, n \geq N),$$

$$|\text{IV}| \leq 4M_0 \left| \frac{\varepsilon_{mn}}{a_{mnmn}} \right|,$$

заключаем:

$$\text{a) } \lim_{m, n \rightarrow \infty} \text{IV} = 0, \quad \text{b) } b\text{-}\lim_{m, n \rightarrow \infty} \text{IV} = 0, \quad \text{c) } r\text{-}\lim_{m, n \rightarrow \infty} \text{IV} = 0.$$

Теперь, ввиду сноски на стр. 31, из (45) следует: а) сходимость, б) b -сходимость, с) r -сходимость ряда (4) при $\{U_{\mu\nu}\} \in \mathfrak{A}_b^0$.

Пусть, далее, $\{U_{\mu\nu}\} \in \mathfrak{A}_b$, причем $\mathfrak{A}_b \{U_{\mu\nu}\} = U$. Обозначив $V_{\mu\nu} = U_{\mu\nu} - U$, будем иметь

$$\{V_{\mu\nu}\} \in \mathfrak{A}_b^0,$$

вследствие чего соответствующий ряд $\sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu} v_{\mu\nu}$, согласно доказанному выше, сходится в известном смысле. Но поскольку

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \varepsilon_{\mu\nu} u_{\mu\nu} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \varepsilon_{\mu\nu} v_{\mu\nu} + \varepsilon_{00} U,$$

то в том же смысле сходится и ряд $\sum_{\mu,\nu} \varepsilon_{\mu\nu} u_{\mu\nu}$. Тем самым теорема 15 полностью доказана.

Примечание. В частности, если \mathfrak{A} является матрицей метода сходимости, то из теоремы 15 вытекает известное предложение [19], по которому ряд (4) сходится или b -сходится (r -сходится) для всех b -сходящихся рядов (1) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\mu,\nu} |\Delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}| < \infty,$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Delta_{\mu} \varepsilon_{\mu\nu} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \Delta_{\nu} \varepsilon_{\mu\nu} = 0 \quad (\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon_{\mu\nu} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \varepsilon_{\mu\nu} = 0).$$

3. Применение к методу взвешенных средних арифметических. Переходя к применению теорем 14 и 15 к методу (R, p_{mn}) убедимся, прежде всего, в существовании пределов (37) при $N=0$, т. е. пределов

$$d'_{\lambda\lambda} = \lim_{m \rightarrow \infty} d_{m\lambda\lambda}, \quad d''_{\lambda\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{\lambda n\lambda}.$$

Согласно формуле (36), в случае множителей сходимости имеем:

$$d_{m\lambda\lambda} = \sum_{\mu=\kappa}^m \varepsilon_{\mu\lambda} \eta_{\mu\lambda\lambda}, \quad d_{\lambda n\lambda} = \sum_{\nu=\lambda}^n \varepsilon_{\lambda\nu} \eta_{\lambda\nu\lambda}. \quad (47)$$

Существование пределов (37) вытекает теперь из легко проверяемой формулы, по которой в случае метода (R, p_{mn})

$$\eta_{\mu\lambda\lambda} = 0 \text{ при } \mu > \kappa + 2, \quad \eta_{\lambda\nu\lambda} = 0 \text{ при } \nu > \lambda + 2.$$

Рассуждениями, аналогичными тем, которыми мы воспользовались при доказательстве теоремы 9, можно, в силу теоремы 4 и примечания к ней, из теорем 14 и 15 вывести следующие предложения. При этом R_0 и R_b обозначают классы рядов, ограниченных, соответственно ограниченно суммируемых методом (R, p_{mn}) .

Теорема 16. Пусть метод (R, p_{mn}) удовлетворяет условию (28) и, сверх того,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_{mn} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{mn} = \infty.$$

Тогда для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были относительно R_0 множителями: а) сходимости, б) b -сходимости, в) r -сходимости, необходимо и достаточно выполнение следующих условий¹:

$$1^\circ \sum_{\mu, \nu} \left| P_{\mu\nu} \Delta_{\mu\nu} \frac{\Delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} \right| < \infty,$$

$$2^\circ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = 0,$$

$$3^\circ \lim_{\substack{\nu \rightarrow \infty \\ \nu \geq N}} \sum_{\mu} \left| P_{\mu\nu} \Delta_{\mu} \frac{\Delta_{\mu} \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} \right| = \lim_{\substack{\mu \rightarrow \infty \\ \mu \geq N}} \sum_{\nu} \left| P_{\mu\nu} \Delta_{\nu} \frac{\Delta_{\nu} \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} \right| = 0,$$

$$4^\circ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{\mu} \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = 0 \quad (\nu \geq N), \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{\nu} \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = 0 \quad (\mu \geq N),$$

$$5^\circ \text{ а) } \lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} P_{\mu\nu} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = 0, \quad \text{ б) } b\text{-}\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} P_{\mu\nu} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = 0,$$

$$\text{ в) } r\text{-}\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} P_{\mu\nu} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = 0$$

Теорема 17. Пусть метод (R, p_{mn}) сохраняет класс последовательностей, ограниченно сходящихся к нулю и, сверх того,

$$r\text{-}\lim_{m, n \rightarrow \infty} P_{mn} = \infty.$$

Тогда для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были относительно R_b множителями: а) сходимости, б) b -сходимости, в) r -сходимости, необходимо и достаточно выполнение следующих условий¹:

$$1^\circ \sum_{\mu, \nu} \left| P_{\mu\nu} \Delta_{\mu\nu} \frac{\Delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} \right| < \infty,$$

$$2^\circ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = 0,$$

$$3^\circ \sum_{\mu} \left| P_{\mu\nu} \Delta_{\mu} \frac{\Delta_{\mu} \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} \right| \leq M \quad (\nu \geq N),$$

$$\sum_{\nu} \left| P_{\mu\nu} \Delta_{\nu} \frac{\Delta_{\nu} \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} \right| \leq M \quad (\mu \geq N),$$

¹ В случаях б) и в) имеем $N = 0$.

$$4^\circ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\Delta_\mu \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = 0 \quad (\nu \geq N), \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\Delta_\nu \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = 0 \quad (\mu \geq N),$$

$$5^\circ \lim_{\nu \rightarrow \infty} P_{\mu\nu} \Delta_\mu \frac{\Delta_\mu \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} P_{\mu\nu} \Delta_\nu \frac{\Delta_\nu \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = 0,$$

$$6^\circ \text{ а) } \left| P_{\mu\nu} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} \right| \leq M \quad (\mu, \nu \geq N), \quad \text{б) а) при } N=0,$$

$$\text{с) б) и } \lim_{\mu \rightarrow \infty} P_{\mu\nu} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} P_{\mu\nu} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = 0.$$

Примечание. При дальнейших небольших ограничениях, накладываемых на (R, p_{mn}) , условия теорем 16 и 17 упрощаются. Так, например, если $p_{\mu\nu} > 0$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$) то условие 4° этих теорем отпадает. Действительно, из условий 3° теорем 16 и 17 вытекает существование предела

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\Delta_\mu \varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} = \alpha_\nu \quad (\nu \geq N).$$

Ввиду $p_{\mu\nu} > 0$, согласно теореме Штольца, отсюда следует

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\mu} = \alpha_\nu \quad (\nu \geq N).$$

$$\sum_{\kappa=0}^{\mu} p_{\kappa\nu}$$

Если предположим, что при некотором сколь угодно большом значении $\nu = \nu_0$ имеем $\alpha_{\nu_0} \neq 0$, то существуют числа $\eta_0 > 0$ и μ_0 , такие, что неравенство

$$\left| \frac{\varepsilon_{\mu\nu_0}}{p_{\mu\nu_0}} \right| > \eta_0$$

справедливо для $\mu \geq \mu_0$. Поскольку это неравенство противоречит условию

$$\left| P_{\mu\nu} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} \right| \leq M \quad (\mu, \nu \geq N),$$

то должно быть $\alpha_\nu = 0$ ($\nu \geq N$). Аналогично доказывается вторая часть условия 4°

3. Применение к методу Чезаро. Так как при методе (C, α, β) , с одной стороны,

$$\eta_{\mu\nu\chi\lambda} = A_{\mu-\chi}^{-\alpha-2} A_\chi^\alpha A_{\nu-\lambda}^{-\beta-2} A_\lambda^\beta$$

и, в силу условий 4° теорем 14 и 15, с другой стороны,

$$|\varepsilon_{\mu\nu}| \leq M \quad (\mu, \nu \geq N),$$

то из (47) вытекает существование пределов (37). Остальные предположения теорем 14 и 15 выполнены, если $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$.

Рассуждениями, аналогичными тем, которыми мы воспользовались при доказательстве теоремы 10, можно из теорем 14 и 15 вывести следующие предложения. При этом C_0 и C_b обозначают классы рядов, ограниченных, соответственно ограниченно суммируемых методом (C, α, β) . $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$.

Теорема 18. Для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были относительно C_0 множителями: а) сходимости, б) b -сходимости, в) r -сходимости, необходимо и достаточно выполнение следующих условий¹:

$$1^\circ \sum_{\mu, \nu} (\mu + 1)^\alpha (\nu + 1)^\beta \left| \Delta_\mu^{\alpha+1} \Delta_\nu^{\beta+1} \varepsilon_{\mu\nu} \right| < \infty,$$

$$2^\circ \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\nu + 1)^\beta \sum_{\mu} (\mu + 1)^\alpha \left| \Delta_\mu^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu\nu} \right| = \\ = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\mu + 1)^\alpha \sum_{\nu} (\nu + 1)^\beta \left| \Delta_\nu^{\beta+1} \varepsilon_{\mu\nu} \right| = 0,$$

$$3^\circ r\text{-}\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} (\mu + 1)^\alpha (\nu + 1)^\beta \varepsilon_{\mu\nu} = 0.$$

Теорема 19. Для того, чтобы величины $\varepsilon_{\mu\nu}$ были относительно C_b множителями: а) сходимости, б) b -сходимости, в) r -сходимости, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$1^\circ \sum_{\mu, \nu} (\mu + 1)^\alpha (\nu + 1)^\beta \left| \Delta_\mu^{\alpha+1} \Delta_\nu^{\beta+1} \varepsilon_{\mu\nu} \right| < \infty,$$

$$2^\circ (\nu + 1)^\beta \sum_{\mu} (\mu + 1)^\alpha \left| \Delta_\mu^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu\nu} \right| \leq M,$$

$$(\mu + 1)^\alpha \sum_{\nu} (\nu + 1)^\beta \left| \Delta_\nu^{\beta+1} \varepsilon_{\mu\nu} \right| \leq M,$$

$$3^\circ \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\nu + 1)^\beta \Delta_\mu^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu\nu} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\mu + 1)^\alpha \Delta_\nu^{\beta+1} \varepsilon_{\mu\nu} = 0,$$

¹ Согласно теореме 18 множители сходимости, b -сходимости и r -сходимости относительно C_0 совпадают. Это можно также вывести из теоремы 5 статьи [20], если в условии 2) взять $\alpha = 0$ соответственно $\beta = 0$. Вместе с тем отметим, что при редактировании теоремы 5 статьи [20] вместо множителей $(m + 1)^\alpha$, $(n + 1)^\beta$ ошибочно написаны соответственно множители m^α , n^β .

- 4° а) $(\mu + 1)^\alpha (\nu + 1)^\beta |\varepsilon_{\mu\nu}| \leq M$ ($\mu, \nu \geq N$), б) а) при $N = 0$,
 в) б) и $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\mu + 1)^\alpha \varepsilon_{\mu\nu} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\nu + 1)^\beta \varepsilon_{\mu\nu} = 0$.

Случай б) теоремы 19 встречается у Мура [1], который изучал множители b -сходимости относительно C_b в общем случае, когда α и β комплексные числа, вещественные части которых положительны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Moore, C. N. Summable series and convergence factors. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 22 (1938).
2. Bosanquet, L. S. Note on the Bohr-Hardy theorem. J. London Math. Soc., 17 (1942), 166—173.
3. Bosanquet, L. S. Note on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 20 (1945), 39—48.
4. Bosanquet, L. S. Note on convergence and summability factors (II). Proc. London Math. Soc., 50 (1948), 295—304.
5. Bosanquet, L. S. Note on convergence and summability factors (III). Proc. London Math. Soc., 50 (1949), 482—496.
6. Lorentz, G. G. Eine Bemerkung über Limitierungsverfahren, die nicht schwächer als ein Cesàro-Verfahren sind. Math. Z., 51 (1949), 85—91.
7. Кноп, К. Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C-Summierbarkeit aufgestellten Satzes. J. reine und angew. Math., 187 (1950), 70—74.
8. Pejerimhoff, A. Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 55 (1951), 23—54.
9. Jurkat, W. — Pejerimhoff, A. Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z., 55 (1951), 92—108.
10. Pejerimhoff, A. Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Math. Z., 57 (1953), 265—290.
11. Jurkat, W. — Pejerimhoff, A. Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 58 (1953), 186—203.
12. Zeller, K. Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z., 53 (1951), 463—487.
13. Кангро, Г. Множители суммируемости для метода взвешенных средних арифметических. Докл. АН СССР, 99, № 1 (1954), 9—11.
14. Hamilton, H. J. Transformations of multiple sequences. Duke Math. J., 2 (1936), 29—60.
15. Robison, D. M. Divergent double sequences and series. Trans. Amer. Math. Soc., 28 (1926), 50—73.
16. Nigam, T. P. Summability of multiple series. Proc. London Math. Soc., 46 (1940), 249—269.
17. Жак, И. Е. — Тиман, М. Ф. О суммировании двойных рядов. Матем. сб., 35 (1954), 21—56.
18. Харди, Г. Расходящиеся ряды, Москва 1951.
19. Hamilton, H. J. On transformations of double series. Bull. Amer. Math. Soc., 42 (1936), 275—283.
20. Кангро, Г. О распространении метода Пейеримхоффа на двойные ряды. Докл. АН СССР, 107, № 5 (1956), 629—632.

SUMMEERUVUSTEGURITEST KAHEKORDSETE RIDADE PUHUL

Prof., füüs.-mat. tead. dr. G. Kangro

Geomeetria kateeder

Resümee

Tähendagu A' , B' teatavaid kahekordsete ridade klasse ja $U_{\mu\nu}$ rea $\sum u_{\mu\nu}$ osasummasid. Suurusi $\varepsilon_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, \dots$) nimetame summeeruvusteguriteks tüüpi $(\mathfrak{A}' B')$, vastavalt (A', B') , kui klassi A' iga rea $\sum u_{\mu\nu}$ puhul rida $\sum \varepsilon_{\mu\nu} U_{\mu\nu}$, vastavalt $\sum \varepsilon_{\mu\nu} u_{\mu\nu}$ kuulub klassi B' . Juhul kui B' kujutab mingit koonduvate ridade klassi, kõneleme koonduvusteguritest \mathfrak{A}' vastavalt A' suhtes.

Olgu A normaalne summeerimismenetlus ja B — summeerimismenetlus, mis on antud rida-jada teisenduse abil mingi maatriksiga $(\beta_{mn\mu\nu})$, kus $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \beta_{mn\mu\nu} = 1$. Järgnevas mõistame klassi A' all

kas kõigi A -tõkestatud või A_b -summeeruvate (s. o. tõkestatult A -summeeruvate) ridade klassi, aga B' all — kõigi B -summeeruvate, B_b -summeeruvate või B_r -summeeruvate (s. o. täielikult B -summeeruvate) ridade klassi.

Nagu näitas põhiliselt Peyerimhoff [8—11], võib anda ühekordsete ridade puhul summeeruvustegurite jaoks tarvilikud tingimused, mis ei sõltu menetlusest B , kusjuures kitsendavatel eeldustel A kohta osutuvad need tingimused kas vahetult või pärast menetlusest B sõltuva sobiva tarviliku tingimuse lisamisi teatavatel juhtudel ka piisavateks.

Käesoleva artikli ülesandeks on Peyerimhoffi meetodi üldistamine kahekordsetele ridadele. Et tarvilike ja piisavate tingimuste leidmine summeeruvustegurite jaoks on kahekordsete ridade vallas küllaltki raskepärane ülesanne, siis on Peyerimhoffi meetod oma

lihtsuse tõttu eriti kohane summeeruvustegurite uurimiseks kahekordsete ridade puhul. Siinjuures osutub, et tüüpi (A', B') summeeruvustegurite korral lisandub põhilisele tarvilikule tingimusele, mis ei sõltu menetlusest B , veel kaks täiendavat tarvilikku tingimust, mis aga sõltuvad menetlusest B . Seepärast kujuneb tüüpi (A', B') summeeruvustegurite uurimine kahekordsete ridade vallas sisuliselt komplitseeritumaks kui ühekordsete ridade juures, mistõttu selle tüübi puhul piirdatakse käesolevas töös vaid koonduvustegurite vaatlemisega.

Tüüpi (A', B') ja (A', B') summeeruvustegurite jaoks tarvilike tingimuste leidmiseks antakse töös üldine meetod, mis on rakendatav sõltumata klassist A' . Juhtudel $A' = A_0$ (A -tõkestatud ridade klass) ja $A' = A_b$ (A_b -summeeruvate ridade klass) tuletatakse tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et suurused $\varepsilon_{\mu\nu}$ oleksid summeeruvustegurid tüüpi (A', B') või koonduvustegurid A' suhtes. Neid tingimusi rakendatakse kahel juhul — kui A on kaalutud aritmeetiliste keskmiste, vastavalt Cesàro menetlus.

О РЕШЕНИЯХ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЫ О ДВУХ КРАСКАХ

Проф., докт. физ.-мат. наук Х. Яаксон

Кафедра математического анализа

1. В данной работе дается постановка топологической проблемы о двух красках, определяется понятие решения этой проблемы, доказывается теорема существования решений и в связи с этим приводится способ построения решений.

Затем раскрывается простой механизм преобразования одного решения в другое и, наконец, вводятся понятия решения первого и второго вида. При помощи решений первого вида устанавливается тесная связь между топологическими проблемами о двух и о четырех красках, позволяющая рассматривать проблему о четырех красках как специальный случай проблемы о двух красках.

I. Топологическая карта

2. Объектом изучения в данной работе являются топологические карты.

Топологическая карта есть карта сферы, разбитой при помощи линий на конечное число областей. При этом мы будем предполагать, что каждая область соприкасается по крайней мере с двумя смежными областями и имеет таким образом по крайней мере две узловые точки, в которых сходятся пограничные линии трех или еще большего числа областей, но не соприкасается сама с собой.

Мы будем называть области топологической карты многоугольниками — (m — угольники, $m = 2, 3, \dots$) а общую пограничную линию двух смежных многоугольников между двумя последовательными узловыми точками — стороной этих многоугольников. Мы будем предполагать, что стороны многоугольников не пересекаются с самими собой, а друг с другом — лишь в узловых точках.

Мы будем называть топологическую карту нормальной, когда из каждой узловой точки исходят три и только три стороны

многоугольников. Впредь мы будем рассматривать лишь нормальные карты.

3. Порядок топологической карты n мы определяем равенством

$$n = N - 3, \quad (1)$$

где N означает число многоугольников данной карты. Обозначим через N_1 и N_2 соответственно число узловых точек и число сторон для карты n -го порядка. Не трудно убедиться в том, что

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 2(n + 1) \\ N_2 &= 3(n + 1) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Возьмем какую-нибудь карту $(n + 1)$ -го порядка. Удалим там одну из сторон. В результате этого два многоугольника сольются в один, две узловые точки исчезнут, а число сторон уменьшится на три (одна сторона удалена, а оставшиеся попарно сольются). Наоборот, переходя от карты n -го порядка к первоначальной карте $(n + 1)$ -го порядка, число многоугольников увеличится на 1, число узловых точек на 2, а число сторон на 3.

Значит, когда формулы (1) и (2) верны до порядка n (включительно), они останутся верными и для карт порядка $(n + 1)$

Нормальных карт нулевого порядка ($n = 0$) не больше одной, состоящей из трех двуугольников с двумя узловыми точками и с тремя сторонами (рис. 1). Итак, для $n = 0$ формулы действительно верны, значит, они верны для $n = 1, 2, 3, \dots$, т. е. для карт любого порядка.

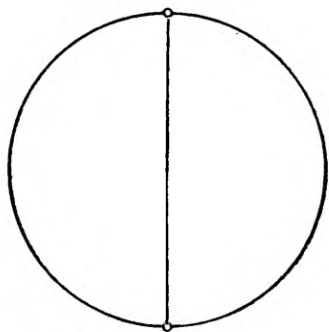


Рис. 1.

Исключение n из формул (1) и (2) даст нам известное соотношение Эйлера

$$N + N_1 - N_2 = 2 \quad (3)$$

4. Топологические карты распадаются, с одной стороны, на неприводимые карты и, с другой стороны, на приводимые карты.

Приводимую карту мы определяем как карту, где либо можно найти пару смежных многоугольников, имеющих более одной общей стороны, либо такую сторону, удаление которой приведет к предыдущему случаю, либо, наконец, оба эти случая имеют место одновременно.

Мы определяем неприводимую карту как карту, которая не является приводимой. Согласно данному определению, неприводимой является карта нулевого порядка (рис. 1), а также карта первого порядка, состоящая из четырех треугольников (рис. 2)

Кроме этой карты имеется еще другая карта первого порядка (рис. 3), которая является, очевидно, приводимой.

Не трудно отдать себе отчет в том, что, в частности, каждая карта порядка $n > 0$, которая содержит двуугольник, является приводимой; точно так же является приводимой каждая карта порядка $n > 1$, которая содержит треугольник.

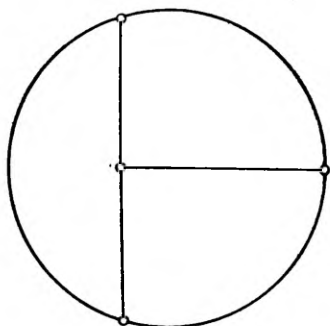


Рис. 2.

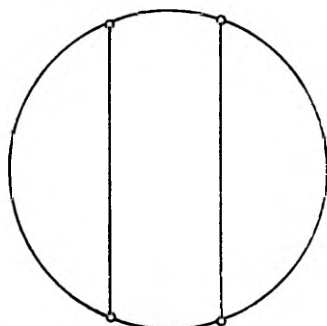


Рис. 3.

С другой стороны, следует отметить, что для приводимости карты не является вовсе необходимым существование среди многоугольников двуугольника или же треугольника.

Действительно, для получения приводимой карты C стоит взять какие угодно карты C_1 , C_2 и связать их друг с другом при помощи двух или же трех соединительных линий (сторон образующихся новых многоугольников) (рис. 4 и рис. 5)

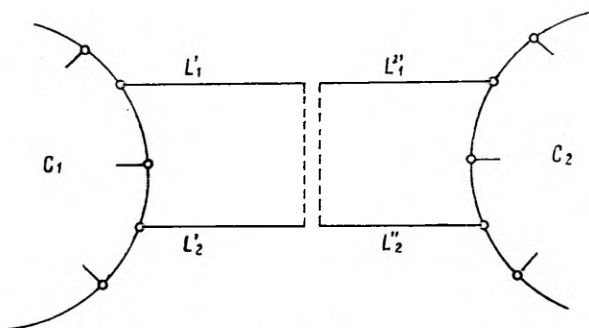


Рис. 4.

На рис. 4 изображен случай приводимости с двумя линиями связи L_1 , L_2 , а на рис. 5 — с тремя линиями связи L_1 , L_2 , L_3 .

5. Для последующего важно приводимую карту разбить на ряд неприводимых карт.

Для этого мы поступим следующим образом. В случае приводимости с двумя линиями связи L_1 , L_2 (рис. 4) мы разрежем эти

линии на две части L_1', L_1'' и L_2', L_2'' из которых L_1' и L_2' исходят из узловых точек, принадлежащих к C_1 , а L_1'' и L_2'' исходят из узловых точек, принадлежащих к C_2 . Соединим свободные концы L_1' и L_2' а также свободные концы L_1'' и L_2'' . В результате мы получим две карты C_1' и C_2' , не имеющие друг с другом никаких связей. Назовем их составляющими карты C .

Аналогично мы поступим и в случае приводимости с тремя линиями связи L_1, L_2, L_3 (рис. 5). Разрежем опять линии L_1, L_2, L_3 на две части: L_1', L_1'' ; L_2', L_2'' ; L_3', L_3''

Линии L_1', L_2', L_3' одними концами связаны с C_1 , другие концы их свободны. Эти свободные концы мы соединим все вместе во

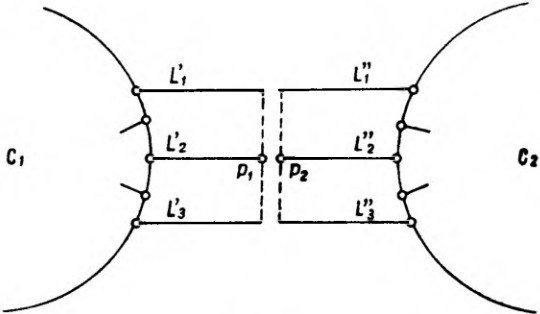


Рис. 5.

вновь образовавшейся узловой точке (P_1). Аналогично свободные концы линий L_1'', L_2'', L_3'' мы соединим все вместе в другой вновь образовавшейся узловой точке (P_2). В результате мы получим опять-таки две составляющие карты C_1' и C_2' данной приводимой карты C .

Нетрудно увидеть, что восстановление первоначальной карты C по ее составляющим C_1' C_2' происходит так: вновь разъединим бывшие свободные концы линий L_1', L_2', L_3' , как и линий L_1'', L_2'', L_3'' и вновь соединим на местах разреза L_1' с L_1'' , L_2' с L_2'' и L_3' с L_3''

6. Обозначим порядки карт C, C_1' и C_2' соответственно через n, n_1, n_2 и выясним соотношения между ними, как в случае приводимости с двумя, так и с тремя линиями связи. Рассмотрим сперва случай первый. Исходя из очевидного факта, что в первом случае число узловых точек карты C (N_1) равно сумме узловых точек карт C_1' и C_2' ($N_1' + N_1''$):

$$N_1 = N_1' + N_1''$$

и воспользовавшись формулой (2), мы получаем $N_1 = 2(n + 1)$; $N_1' = 2(n_1 + 1), N_1'' = 2(n_2 + 1)$, откуда $2(n + 1) = 2(n_1 + 1) +$

$$+ 2(n_2 + 1), \text{ или } n = n_1 + n_2 + 1 \tag{4}$$

Рассмотрим теперь второй случай. Во втором случае каждая из составляющих имеет по одной узловой точке (P_1 или же P_2), которой нет у C (п. 5). Следовательно, теперь

$N_1 + 2 = N_1' + N_1''$ отсюда, как нетрудно увидеть, следует, что

$$n = n_1 + n_2 \quad (5)$$

Во втором случае очевидно $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$. Поэтому, на основании формул (4) и (5), мы будем иметь как в первом, так и во втором случае неравенства

$$n > n_1, n > n_2 \quad (6),$$

т. е. порядок каждой из составляющих ниже порядка приводимой карты C .

Когда обе составляющие C_1 и C_2 неприводимы, то мы достигли уже желанной цели, т. е. разбили приводимую карту C на неприводимые составляющие, причем порядок каждой из них ниже порядка C .

Если же одна из составляющих или же обе они приводимы, то к приводимой составляющей мы применим тот же самый прием разложения на новые составляющие, с приводимой новой составляющей продолжим то же самое и т. д. и т. д., до тех пор, пока все приводимые составляющие не окажутся разложенными на неприводимые составляющие. Этот момент непременно наступит, так как каждый этап разложения связан с понижением порядка составляющих, а поэтому процесс разложения не может продолжаться без конца.

Таким образом мы приходим к заключению, что каждая приводимая карта может быть разложена на конечное число неприводимых составляющих.

II. Топологическая проблема о двух красках

7 В связи с топологической картой мы сформулируем теперь топологическую проблему о двух красках следующим образом. Эта проблема состоит в том, чтобы окрасить при помощи двух красок: m и p стороны многоугольников нормальной топологической карты так, чтобы 1) каждая сторона была окрашена лишь одной краской, либо краской p , либо краской m , и чтобы 2) из трех сторон, исходящих из любой узловой точки, одна сторона была окрашена краской p , а остальные две краской m .

Когда стороны многоугольников какой-либо карты действительно окрашены согласно поставленным условиям, то мы говорим, что проблема для этой карты решена, или, другими словами, что мы имеем решение топологической проблемы о двух красках для данной топологической карты.

При наличии решения для карты порядка n из общего числа $3(n+1)$ сторон $(n+1)$ сторон окрашены краской p и каждая

из них изолирована от других, так как из каждой узловой точки исходит лишь одна p -сторона.

$2(n + 1)$ сторон окрашены краской m , ни одна из них не изолирована от других m -сторон, так как из каждой узловой точки исходят 2 m -стороны; там, где кончается одна сторона, начинается новая и где кончается последняя, начинается опять новая и т. д., пока мы не вернулись обратно в исходную узловую точку. А возврат этот неизбежен, так как число узловых точек ограничено и путь наш при следовании все время в одном и том же направлении не может привести нас снова к уже пройденной узловой точке, откуда исходят лишь 2 m -стороны, и обе они уже раз пройдены. Путь должен непременно кончиться m -стороной, приводящей к исходной узловой точке, которая осталась вначале непройденной. Значит, m -стороны образуют замкнутую mm -линию без всяких завитков и петель. Когда эта линия проходит через все $2(n + 1)$ узловых точек, то в нее входят все m -стороны и mm -линия является единственной. Например, в случае карты нулевого порядка (рис. 1) из трех сторон выберем какую-нибудь одну за p -сторону; тогда остальные две будут m -сторонами и образуют единственную замкнутую mm -линию.

Когда же имеется такая m -сторона, через которую не проходит полученная mm -линия, — а это вполне возможно, как мы в этом убедимся ниже на простом примере, — то эта сторона принадлежит другой замкнутой mm -линии, отличной от первой и, в силу нормальности карты, вполне изолированной от нее. Например, в случае карты первого порядка (рис. 3), состоящей из двух 4-угольников и из двух 2-угольников, выберем за p -стороны общие стороны 4-угольников. Тогда стороны 2-угольников будут m -сторонами и образуют две замкнутые mm -линии.

Продолжая наши рассуждения, мы приходим к заключению, что каждая m -сторона принадлежит одной и только одной замкнутой mm -линии. mm -линии вполне изолированы друг от друга и не имеют никаких завитков и петель. Число их ≥ 1 .

8. Замкнутые mm -линии мы будем называть межзональными линиями, так как они позволяют все многоугольники карты распределить на две зоны, которые, в свою очередь, могут распаться на части, изолированные друг от друга многоугольниками другой зоны.

Условимся именно считать два смежных многоугольника с общей m -стороною, принадлежащими разным зонам, один из них зоне I, а другой зоне II, причем безразлично какой из них мы отметим значком I и какой — значком II. Условимся дальше считать два смежных многоугольника с общей p -стороной, принадлежащими одной и той же зоне, либо зоне I, либо зоне II.

Нетрудно увидеть, что при наличии решения проблемы о двух красках для какой-нибудь нормальной карты стоит лишь один из многоугольников отметить одним из значков I или II, скажем, значком I, и, в силу сделанного только что соглашения, каждый

из остальных многоугольников получит уже вполне определенный значок; при этом никогда все три многоугольника, имеющие общую узловую точку, не получают один и тот же значок, но всегда два из них получают один и тот же значок, между тем как третий получит уже отличный от них значок. На рисунках 6 и 7 приведены два решения для одной и той же карты 5 порядка, причем одному решению (рис. 6) соответствует одна единственная межзональная линия с двумя нераспадающимися на части зонами; другому же решению (рис. 7) соответствуют три межзональные линии и каждая из двух зон распадается на две части. На рисунках 6 и 7 буква p отмечена одной черточкой: ' и буква t двумя черточками: '' Для наглядности t -линии проведены жирно.

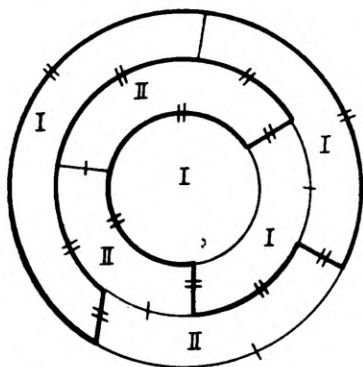


Рис. 6.

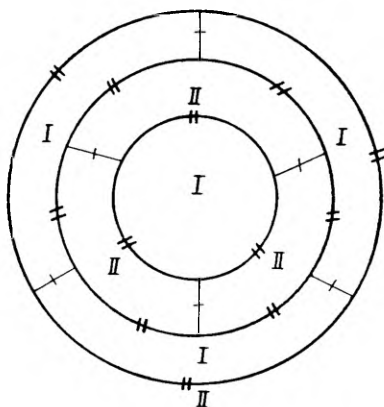


Рис. 7.

На основании вышеизложенного можно с очевидностью проблеме о двух красках дать другую формулировку, которая, однако, эквивалентна первоначальной формулировке (п. 7), а именно: снабдить многоугольники данной нормальной карты значками I или II так, чтобы 1) каждый многоугольник получил один из этих значков и только один и чтобы 2) из трех многоугольников, имеющих общую узловую точку, два получили бы одинаковые значки, а третий — отличный от них значок. Раз решена эта последняя проблема, то тем самым вполне определена и окраска каждой стороны: общая сторона двух смежных многоугольников с одинаковыми значками есть p -сторона, а общая сторона двух смежных многоугольников с разными значками есть t -сторона. При этом из каждой узловой точки будут опять-таки исходить одна p -сторона и 2 t -стороны.

III. О решениях проблемы

9. Займемся теперь изучением вопроса о существовании решений для всякой нормальной карты, к тому же решений, удовлетворяющих одному из двух следующих начальных условий:

1) произвольно выбранная сторона должна быть p -стороной. 2) она должна быть m -стороной. Отметим, что из выполнимости условия 1) сразу же следует и выполнимость условия 2), так как из двух остальных сторон, исходящих из той же самой точки, что и сторона, которая должна быть m -стороной, стоит лишь одной стороне предписать, что она должна быть p -стороной, и когда это последнее условие выполнено, то остальные обе стороны, а значит и первоначально нами выбранная сторона, окажутся уже непременно m -сторонами. Ведь из всякой узловой точки исходит лишь одна p -сторона и две m -стороны.

Ввиду этого нам остается лишь доказать существование решений, удовлетворяющих первому, более сильному начальному условию.

Прежде чем приступить к формулировке и к доказательству теоремы существования решений, остановимся предварительно на

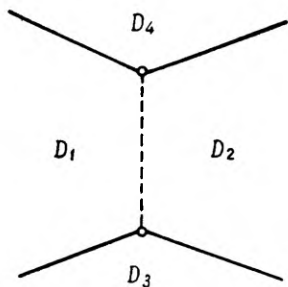


Рис. 8.

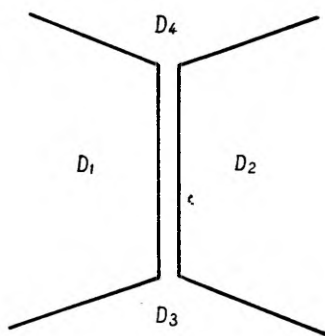


Рис. 9.

рассмотрении некоторых вопросов, имеющих значение при ходе доказательства названной теоремы.

10. Одним из этих вопросов является вопрос о понижении порядка топологической карты. Обычно понижение порядка на I достигается путем удаления одной из сторон двух смежных многоугольников, в силу чего эти два многоугольника D_1 и D_2 сливаются в один (рис. 8).

С другой стороны, как показано на фиг 9, понижение порядка на I достигается и путем проведения коридора вдоль общей стороны многоугольников D_1 и D_2 , в силу чего многоугольники D_1 и D_2 разъединяются друг от друга, но зато многоугольники D_3 и D_4 сливаются в один многоугольник. При этом следует однако иметь в виду, что этот последний прием не всегда применим. В самом деле, в результате проведения коридора число сторон у многоугольников D_1 и D_2 уменьшается на 2, так как три стороны каждого из них сливаются в одну (рис. 9). Значит, если до проведения коридора число сторон у того или у другого из них или же у

обоих было 3, то после проведения коридора мы будем иметь дело уже с петлей (рис. 10), (либо с двумя петлями), где из угловой точки P исходят лишь 2 стороны вместо трех и линия L не является более общей стороной двух смежных многоугольников, но линией, всецело лежащей в одном и том же многоугольнике, так что к точке P сходятся лишь два многоугольника вместо трех, причем один из них — «одноугольник» (D_1). Таким образом после проведения коридора условия нормальности карты более не выполняются.

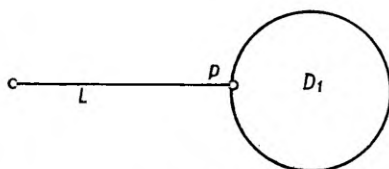


Рис. 10.

Поэтому вдоль стороны треугольника мы будем всегда избегать проводить коридор.

Рассмотрим теперь случай, когда среди многоугольников D_1 и D_2 встречается двуугольник.

Когда D_1 и D_2 оба суть двуугольники, тогда мы имеем дело с картой нулевого т. е. наимизшего порядка, и в целях понижения порядка карты нет надобности в проведении коридора (который дал бы две замкнутых линии, лишенных каких бы то ни было связей между собою).

Когда же D_1 есть двуугольник, а D_2 есть m -угольник ($m \geq 4$), то проведение коридора между ними вызвало бы распадение данной нормальной карты порядка n на новую нормальную карту порядка $n - 1$ и на замкнутую линию, лишенную связей с картой ($n - 1$) порядка. Ввиду того, что эта замкнутая линия с прилегающими к ней с обеих сторон областями не является более нормальной картой, мы будем в данной работе при доказательстве теоремы существования решений избегать проведения коридора в рассматриваемом случае, исходя из точки зрения целесообразности. С принципиальной же точки зрения такая операция вполне допустима.

Во всех случаях, наконец, когда число сторон у D_1 и $D_2 \geq 4$, нет никаких препятствий для проведения коридора на неприводимой карте, на приводимой же — только при добавочном условии, чтобы от этого число линий связей между какиминибудь двумя частями карты не стало равным единице.

Стороны этих коридоров будем отмечать при помощи непрерывных линий, а сами коридоры называть коридорами с непрерывными линиями.

Следует отметить, что коридоры с непрерывными линиями не следует смешивать с коридорами с пунктирными линиями, рассмотренными выше (п. 5). Те и другие различны как по образу их построения (одни — вдоль сторон многоугольника, другие же — через многоугольник), так и по некоторым присущим им свойствам (одни, например, устраняют некоторые узловые точки исходной карты, другие же — нет) и, наконец, по той роли, которую они призваны играть в данной работе. При помощи коридоров с пунктирными линиями мы разлагаем приводимую карту на ряд неприводимых карт, а посредством пунктирных линий, как сторон коридоров, мы производим согласование начальных условий двух карт, примыкающих с той и с другой стороны к одному и тому же коридору с пунктирными линиями (п. 11 и п. 12). При помощи же коридоров с непрерывными линиями мы производим понижение порядка исходной неприводимой карты и преобразование ее в приводимую карту (п. 12).

11. Вторым вопросом, которым мы займемся предварительно, является вопрос о переносе начального условия с приводимой карты на одну или же на несколько неприводимых составляющих карт (п. 6).

Пусть дана какая-нибудь приводимая карта и на ней задано начальное условие: произвольно выбранной стороне приводимой карты предписано, что она должна оказаться p -стороной (стороной с одной черточкой: $'$), либо что она должна оказаться m -стороной (стороной с двумя черточками: $''$). Эту сторону мы будем называть стороной носительницей начального условия.

Как показано в пункте 6, каждая приводимая карта может быть разложена на конечное число неприводимых составляющих, которые получаются последовательным образованием пар составляющих.

Когда сторона-носительница начального условия на начальной приводимой карте не входит в число тех линий связи (2 или 3 линии), которые разрезаются для образования первой пары составляющих, то ясно, что эта сторона будет стороной лишь одной из составляющих первой пары.

Когда же рассматриваемая сторона входит в число указанных выше линий связи и, как таковая, будет разрезана на две части, то мы условимся обеим ее частям приписывать тот же значок («'» либо «''»), который имела целая сторона; точно так же мы условимся стороной, образуемым из частей двух разных сторон с одинаковыми значками, присваивать общий значок их составных частей.

Благодаря сделанным только что соглашениям начальное условие переносится с начальной приводимой карты на обе карты первой пары составляющих, как в случае приводимости с двумя линиями связи (рис. 4), так и с тремя линиями связи (рис. 5),

когда сторона-носительница начального условия является линией связи и как таковая подвергается разрезу. Следует иметь в виду, что в случае 2 линий связи обе эти линии непременно одного и того же рода, либо обе — p -линии, либо обе m -линии, как общие стороны одних и тех же двух смежных многоугольников. Отметим также, что свободные концы разрезанных линий связей мы соединяем при помощи пунктирных линий, которые являются таким образом сторонами образующегося при этом коридора (рис. 4 и рис. 5). Каждой паре составляющих карт соответствует коридор с пунктирными сторонами.

Считая значком пунктирной линии значок той линии, продолжением которой она является, мы можем, на основании сделанного соглашения, очевидно, сказать, что в случае переноса начального условия с приводимой карты на обе карты одной и той же пары составляющих этой паре соответствует коридор с пунктирными линиями, значки которых удовлетворяют условию: друг против друга лежащие пунктирные стороны коридора имеют одинаковые значки.

Итак, мы разобрали вопрос о переносе начального условия с данной приводимой карты на составляющие первой пары и выяснили, что это условие перейдет по крайней мере на одну из карт первой пары составляющих.

Когда карта первой пары, на которую перенеслось начальное условие, в свою очередь приводима, то начальное условие перейдет с нее совершенно аналогично по крайней мере на одну из карт второй пары составляющих и т. д. Рано или поздно начальное условие перенесется наконец по крайней мере на одну неприводимую составляющую или же на несколько неприводимых составляющих карт из числа тех, на которые разлагается данная приводимая карта. Ведь по крайней мере обе составляющие последней пары неприводимы.

Теперь перейдем к доказательству основной теоремы о существовании решений.

12. Теорема. Всякая нормальная топологическая карта имеет решение, удовлетворяющее наперед заданному начальному условию.

Теорему мы докажем при помощи метода совершенной индукции. Для неприводимых карт нулевого и первого порядка (рис. 1 и рис. 2) верность теоремы проверяется без труда. Кроме карт, приведенных на рис. 1 и рис. 2, не имеется других от них отличных неприводимых карт нулевого и первого порядка.

Допустим теперь, что теорема верна для всех неприводимых карт до порядка n (включительно) и докажем, что тогда она остается верной также для всех неприводимых карт порядка $n + 1$, равно как и для всех приводимых карт до порядка $n + 1$ (включительно).

Остановимся сначала на случае, когда данная карта приводима и порядка $n + 1$. Докажем для нее теорему

Такая приводимая карта, согласно п. 6, разлагается на конечное число неприводимых составляющих карт, порядок каждой из которых ниже чем $n + 1$. Назовем эту систему составляющих системой S . Пусть на данной приводимой карте задано начальное условие. Согласно п. 11, это условие переходит, по крайней мере, на одну из карт системы S , или даже на несколько из них. Для каждой из них, по сделанному допущению, существует решение, удовлетворяющее начальному условию. Мыслим эти решения построенными. Когда в системе S имеется r составляющих карт, на которые перешло начальное условие данной приводимой карты, то между ними существует $r - 1$ коридоров с пунктирными линиями, значки которых удовлетворяют условию: друг против друга лежащие пунктирные линии каждого коридора имеют одинаковые значки. В силу этого не представляет никакого труда построить решение для приводимой карты, составленной из этих r неприводимых карт, предполагая известными решения для последних. Для этой цели стоит лишь все $r - 1$ коридоров уничтожить, а соответствующие им линии связи восстановить в первоначальном виде. Поступая так, мы получим одновременно как приводимую карту C_1 , составленную из r неприводимых карт, так и ее решение, вполне определяемое решениями этих последних и удовлетворяющее очевидно наперед заданному начальному условию.

Когда система S состоит только из этих r неприводимых карт, то теорема этим доказана.

В общем случае в системе S имеются, кроме этих r карт, еще другие неприводимые карты. Из них по крайней мере одна имеет общий коридор с только что построенной приводимой картой C_1 , вообще же r_1 из них имеют такие общие коридоры с C_1 . Пунктирные линии с одной стороны коридоров принадлежат к C_1 , и каждая из них имеет таким образом вполне определенный значок (' или "), как это следует очевидно из наличия решения для карты C_1 . С другой же стороны коридоров расположенные пунктирные линии лишены пока таких значков. Снабдим их также значками.

Для этого условимся сделать это так, чтобы пунктирные линии с другой стороны коридора имели такие же значки, какие имеют соответствующие им (т. е. противоположащие им) пунктирные линии с одной стороны коридоров.

Этим вполне определено начальное условие (либо p -условие, либо t -условие) для каждой из этих r_1 неприводимых карт. Так как порядок каждой из них ниже чем $n + 1$, то, согласно сделанному в начале допущению, каждая из этих r_1 неприводимых карт имеет решение, удовлетворяющее только что определенному для нее начальному условию. Мыслим эти решения построенными. Тогда, применяя тот же прием, при помощи которого мы построили C_1 , исходя из r неприводимых карт, а также ее решение по решениям двух этих r карт, мы построим теперь новую приводимую карту C_2 высшего порядка, исходя из C_1 и r_1 неприводи-

мых карт, а также решение для C_2 по решениям для C_1 и для этих r_1 карт. Это решение очевидно удовлетворяет наперед заданному начальному условию. Значит, когда в системе S нет других карт, кроме этих $r + r_1$ карт, которыми мы уже воспользовались, то теорема доказана. Когда же в системе S имеются кроме них еще другие карты, то мы повторим наши рассуждения и построим новую приводимую карту C_3 высшего порядка, а также решение для нее, удовлетворяющее наперед заданному начальному условию, и т. д. и т. д., пока не дойдем, наконец, до первоначально данной приводимой карты C_0 , для которой получим аналогично решение, удовлетворяющее наперед заданному начальному условию. Этим теорема доказана для всех приводимых нормальных карт до порядка $n + 1$ (включительно).

Остается таким образом доказать теорему и для всех неприводимых карт порядка $n + 1$ (включительно), исходя из того, что теорема верна для всех неприводимых карт до порядка n (включительно) и для всех приводимых карт до порядка $n + 1$ (включительно).

Пусть дана какая-нибудь неприводимая карта порядка $n + 1$ и пусть наперед задано на ней начальное условие. Согласно п. 9, мы можем ограничиться разбором случая, когда задано именно более сильное условие, т. е. p -условие.

Пусть заданная p -сторона будет общей стороной многоугольников первой зоны (I) с номерами 1 и 2 (рис. 11 и рис. 12). Обозначим многоугольники, имеющие общие узловые точки с многоугольниками № 1 и № 2, номерами 3 и 4.

Вследствие того, что по нашему предположению рассматриваемая карта $(n + 1)$ -го порядка неприводима, многоугольники № 3 и № 4 являются различными, несовпадающими друг с другом многоугольниками.

В силу налагаемого начального p -условия, общие стороны многоугольников № 3 и № 4 с многоугольниками № 1 и № 2 должны быть m -сторонами, а сами многоугольники № 3 и № 4 должны принадлежать зоне II.

Нам следует доказать, что исходная неприводимая карта $(n + 1)$ -го порядка имеет решение и притом такое, что оно удовлетворяет заданному p -условию (т. е. что в нем значками многоугольников № 1 и № 2 будут I : 1.1 и 2.1, а значками многоугольников № 3 и № 4 будут II : 3.II и 4.II).

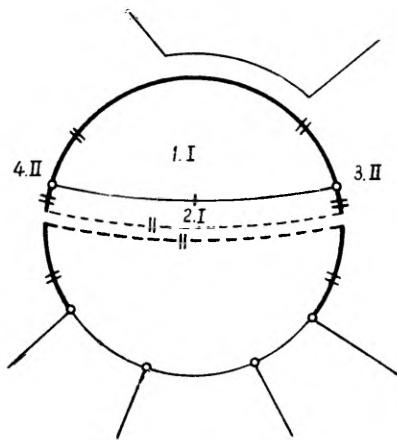


Рис. 11.

Для доказательства этого построим вспомогательную карту C_1 при помощи проведения на исходной карте C_0 m коридоров с непрерывными линиями вдоль сторон $(2m + k)$ — угольника № 1 ($m \geq 1, k = 2, 3$), начиная, скажем, с многоугольника № 3 и приводя его к слиянию с m многоугольниками карты C_0 , смежными с многоугольником № 1, и притом так, чтобы многоугольники № 1 и № 2 оставались смежными. С одной стороны этих коридоров располагается многоугольник № 1, с другой же стороны m многоугольников и притом различных, так как до проведения m коридоров они были смежными с многоугольником № 1 на неприводимой карте C_0 . Но на неприводимой карте ни один многоугольник

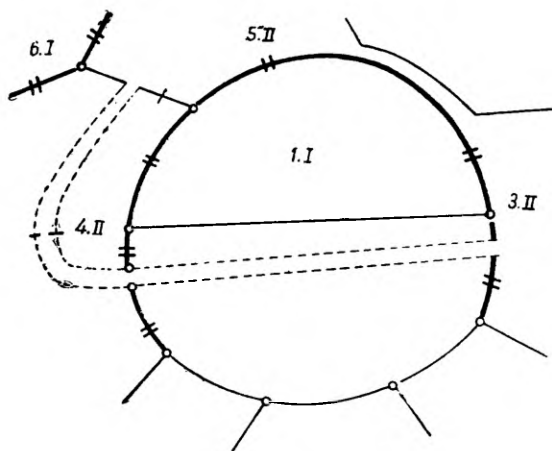


Рис. 12.

не может иметь со смежным многоугольником более одной общей стороны. Поэтому число сторон ни у одного из этих m многоугольников не может быть меньше, чем 2, так как на C_0 оно не может быть меньше, чем 4.

Аналогично нетрудно убедиться в том, что на карте C_0 многоугольник № 3 и m многоугольников, приведенных с ним к снятию посредством m -коридоров с непрерывными линиями, различны, так что каждый из этих коридоров соединяет два несовпадающих друг с другом многоугольника.

Значит, проведение m коридоров с непрерывными линиями вдоль сторон многоугольника № 1 на карте C_0 не расщепляет C_0 на отдельные части, лишённые линий связей друг с другом, и не порождает петель (п. 10), но даёт цельную новую карту C_1 .

Карта C_1 нормальна, так как каждая узловая точка на C_1 является и узловой точкой на нормальной карте C_0 и из нее на карте C_1 исходит столько же сторон, сколько на карте C_0 .

Карта C_1 порядка $n + 1 - m$, так как порядок y C_0 $n + 1$, а проведение m коридоров уничтожило 2 m узловых точек и понизило таким образом порядок на m .

Порядок карты $C_1 \leq n$, так как

$$n + 1 - m \leq n \quad (m \geq 1).$$

Карта C_1 приводима, так как многоугольник № 1 на ней имеет k сторон ($k = 2, 3$). Ведь на карте C_0 многоугольник № 1 был $(2m + k)$ -угольником ($m \geq 1, k = 2, 3$), а в результате проведения m коридоров число сторон уменьшилось на $2m$.

Теорема доказана выше для всех приводимых нормальных карт порядка до $n + 1$ (включительно), а значит и для рассматриваемой карты C_1 , которая, как мы только что видели, является приводимой нормальной картой порядка, не превосходящего n .

На основании этого мы можем быть уверены, что карта C_1 имеет решение, удовлетворяющее произвольно заданному начальному условию.

Пусть начальное условие для карты C_1 совпадает с начальным условием для карты C_0 , т. е. пусть и для C_1 p -стороной будет общая сторона многоугольников № 1 и № 2. Такое предписание можно сделать, потому что коридоры были так построены, что названные только что многоугольники оставались смежными и на карте C_1 . Пусть и здесь значками многоугольников № 1 и № 2 будут I 1.I и 2.I, а следовательно значками многоугольников № 3 и № 4 должны быть II : 3.II и 4.II. При этом следует иметь в виду, что многоугольник № 3 на карте C_1 является расширенным по сравнению с многоугольником № 3 на карте C_0 , включая в себя, помимо этого последнего, еще m различных многоугольников карты C_0 , приведенных к слиянию с ним посредством m коридоров. Когда число сторон у многоугольника № 1 четное, расширенный многоугольник № 3 включает в себя и многоугольник № 4 (рис. 11). при нечетном же числе сторон он простирается до многоугольника № 4, имея с последним общую сторону. Эта сторона будет p -стороной, так как значки у смежных многоугольников одинаковы (II) p -сторона опирается обоими концами на многоугольники с одинаковыми значками, в данном случае этим значком является I (рис. 12).

Значки для всех остальных многоугольников карты C_1 даются решением для карты C_1 , удовлетворяющим только что описанному начальному условию. Для доказательства верности нашей теоремы для карты C_0 нет надобности в том, чтобы упомянутое здесь решение для карты C_1 было эффективно построено. Достаточно лишь того факта, что такое решение для карты C_1 существует. Мыслим его построенным. Тогда, согласно определению решения (п. 8), при каждой узловой точке на карте C_1 из трех многоугольников, имеющих эту узловую точку общей узловой точкой, два будут иметь одинаковые значки, а третий различный значок.

Остается теперь показать, как по решению для карты C_1 построить соответствующее решение для карты C_0 .

Для этого мыслим отмеченными на карте C_1 значки многоугольников, дающие решение для карты C_1 .

Сохраним эти значки и закроем m коридоров, проведенных вдоль сторон многоугольника № 1, заставив слиться противоположные стороны коридоров. Этим будет восстановлена карта C_0 . Присвоим значок II каждому из $m + 1$ многоугольников, входивших на карте C_1 в состав расширенного многоугольника № 3 и ставших теперь снова самостоятельными.

Каждый многоугольник на карте C_0 имеет теперь свой значок. Нетрудно доказать, что система этих значков и даст решение для карты C_0 . В самом деле, для этого стоит только убедиться в том, что на карте C_0 нет такой узловой точки, где все три примыкающие к ней многоугольника имели бы одинаковые значки. Действительно, этого не может быть в какой-либо узловой точке карты C_0 , которая является в то же время и узловой точкой для карты C_1 , так как мы имеем дело со значками, определяющими решение для карты C_1 , а в случае решения все три многоугольника при одной узловой точке не могут иметь одинаковых значков. Этого не может быть и в какой-либо узловой точке карты C_0 , которая не является в то же время и узловой точкой карты C_1 (это — те узловые точки, которые исчезли при проведении m коридоров и которые, следовательно, восстанавливаются при закрытии коридоров, т. е. при переходе от карты C_1 к карте C_0). В самом деле, это так, потому что к каждой из этих $2m$ узловых точек примыкает с одной стороны многоугольник № 1 со значком I, а с другой стороны один из тех $m + 1$ многоугольников со значком II, на которые распадается при закрытии коридоров расширенный многоугольник № 3.

Ввиду того, что карта C_0 не имеет других узловых точек кроме только что перечисленных, мы приходим неизбежно к заключению, что рассматриваемая нами система значков действительно представляет собою решение для неприводимой карты C_0 ($n + 1$)-го порядка и притом такое, что оно удовлетворяет наперед заданному начальному условию.

Этим теорема существования решения доказана для всякой неприводимой и для всякой приводимой нормальной карты какого бы ни было порядка.

13. Доказанная только что теорема — конструктивного характера. Мы не только доказали существование решений, но мы дали вместе с тем и построение такого решения по решениям составляющих карт. Из хода доказательства теоремы существования решений непосредственно вытекает способ нахождения решения, который состоит, в сущности, в том, что задача построения решения для данной карты приводится к совершенно аналогичным задачам, но уже для карт, порядка которых все ниже и ниже.

Это достигается применением следующих операций:

1. задание начального условия для данной карты, причем, согласно п. 9, это условие можно считать p -условием;
2. проведение коридоров вдоль сторон многоугольника, снаб-

женного уже одним из зональных значков (либо I, либо II), до тех пор, пока этот многоугольник не становится либо треугольником, либо двуугольником;

3. разложение приводимой карты на неприводимые составляющие (при помощи коридоров с пунктирными линиями). причем этот процесс можно считать произведенным по этапам: сначала разлагаем данную приводимую карту C_1 на пару составляющих $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, из которых $C_1^{(1)}$ неприводима; когда $C_2^{(1)}$ приводима, мы разлагаем ее в свою очередь, на пару составляющих $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$, из которых опять-таки $C_1^{(2)}$ неприводима и т. д., пока наконец мы не дойдем до пары составляющих $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$, где уже обе составляющие неприводимы;

4. определение начальных условий для составляющих $C_1^{(2)}$, $C_1^{(3)}$, $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$ по правилу значков для сторон коридоров с пунктирными линиями (п. 11) Пусть обозначения для составляющих выбраны так, чтобы $C_1^{(2)}$ имела общий коридор с $C_1^{(1)}$, $C_1^{(3)}$ — с $C_1^{(2)}$, $C_1^{(k)}$ — с $C_1^{(k-1)}$ и, наконец, $C_2^{(k)}$ — с $C_1^{(k)}$ и чтобы $C_1^{(1)}$ была носительницей начального условия, заданного для первоначальной карты. Тогда начальное условие для $C_1^{(i)}$ определится сразу же, как только будут известны значки у сторон $C_1^{(i-1)}$, являющихся сторонами коридора между $C_1^{(i-1)}$ и $C_1^{(i)}$, а эти значки будут известны по крайней мере тогда, когда для $C^{(i-1)}$ будет построено решение:

5. Построение решений для составляющих карт $C_1^{(2)}$, $C_1^{(3)}$, $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$ по определенным для них начальным условиям. Для $C_1^{(1)}$ такое решение на лицо (рис. 11 и рис. 12). Оно определяет начальное условие для $C_1^{(2)}$. Построив решение для $C_1^{(2)}$, мы в состоянии определить начальное условие для $C_1^{(3)}$ и т. д. Построение решения для $C_1^{(i)}$, удовлетворяющего определенному для этой карты начальному условию, не представляет никакого труда, когда $C_1^{(i)}$ нулевого или первого порядка.

Когда же порядок ее выше, чем 1, то мы будем обращаться с нею точно так же, как мы это только что сделали с данной картой.

Ясно, что, поступая так и повторно применяя только что перечисленные операции, мы добьемся в конце концов того, что наша первоначальная карта распадается на конечное число составляющих, порядок каждой из которых не выше 1.

Определив для последних в известной последовательности начальные условия и построив для них соответственные решения, мы в состоянии по ним без труда построить и решение для первоначальной карты, удовлетворяющее к тому же заданному для нее начальному условию.

14. Два решения одной и той же карты мы будем считать отличными друг от друга, когда можно будет указать такую линию, непосредственно связывающую две узловые точки, что она будет m -линией при одном решении и p -линией при другом решении.

Из данного только что определения следует:

1) что циклическая подстановка зональных значков (I, II) для всех многоугольников карты не даст нового решения, отличного от прежнего, так как характер каждой линии от этого не изменится;

2) точно так же мы не получим нового решения, когда зональные значки (I и II) останутся прежними у всех многоугольников карты. Значит, для получения нового решения необходимо, чтобы зональные значки подверглись изменению у части многоугольников и притом так, чтобы оставалось в силе основное условие для существования решения: к каждой узловой точке должны сходиться два многоугольника из одной зоны и один многоугольник из другой зоны, или, другими словами, из каждой узловой точки должны исходить две m -стороны и одна p -сторона. Отсюда непосредственно следует, что, изменяя характер у одной стороны, нужно изменить характер у всех звеньев замкнутой mp -цепи, одним из звеньев которой является рассматриваемая сторона, а отсюда, принимая во внимание зависимости между значками m и p , с одной стороны, и значками I и II, с другой стороны (п. 8), в свою очередь, неизбежно следует,

что нужно также произвести циклическую подстановку (I, II) значков многоугольников, расположенных по одну сторону от этой замкнутой mp -цепи.

Таким образом выясняется картина того, как происходит переход от одного решения к другому: для этого надо произвести циклическую подстановку зональных значков

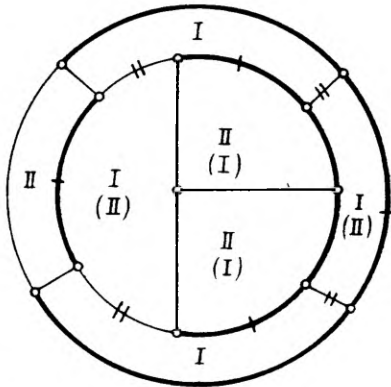


Рис. 13.

(I, II) у части многоугольников данной карты, равно как и циклическую подстановку (m, p), значков m и p для всех тех замкнутых mp -цепей, которые являются пограничными линиями областей, состоящих из многоугольников с измененными зональными значками. На рис. 13 показаны два решения для одной и той же карты. Измененные зональные знаки даны в скобках, первоначальные mp -линии проведены жирно, а измененные значки у звеньев mp -цепи показаны черточками (" ' ")

На вопрос, имеет ли всякая карта более одного решения, дает утвердительный ответ выше доказанная основная теорема, согласно которой существует решение, удовлетворяющее заданному начальному условию, а это последнее может быть как p -условием, так и m -условием, т. е. одна и та же сторона может фигурировать один раз как p -линия, а другой раз как m -линия. Значит, каждая нормальная карта имеет по крайней мере

два решения. На основании вышеизложенного мы можем быть уверены, что все другие решения для данной карты могут быть выведены из одного произвольно выбранного решения для нее при помощи соответственных циклических подстановок (I, II) и (m, p) .

15. Решения топологической проблемы о двух красках распадаются на две категории: на решения первого и второго вида.

Решением первого вида мы будем называть такое решение, при котором все без исключения mm -линии на рассматриваемой карте состоят из четного числа звеньев.

Когда же среди mm -линий имеются такие, у которых нечетное число звеньев, то такое решение мы будем называть решением второго вида.

При всяком решении второго вида число mm линий с нечетным числом звеньев всегда четное число. В этом нетрудно убедиться, принимая, с одной стороны, в расчет, что каждая нормальная карта имеет четное число узловых точек (п. 3), а, с другой стороны, что каждая узловая точка принадлежит одной и только одной mm -линии (п. 7).

При всяком решении первого вида по каждой сторону от любой mm линии расположено четное число p линий, исходящих из узловых точек рассматриваемой mm линии (при этом p -линия считается дважды, когда она опирается обоими концами на одну и ту же mm -линию). В верности этого предложения нетрудно убедиться при помощи полной индукции. Действительно, верность его для карт нулевого и первого порядка очевидна. Переход от карты $n + 1$ порядка к карте n -го порядка совершается либо путем удаления одной p -линии, опирающейся обоими концами на одну и ту же mm -линию, либо путем образования коридора вдоль mm -линии. Результатом той и другой операции будет карта n -го порядка с решением первого вида. Из верности предложения для карты n -го порядка следует верность его и для карты $n + 1$ -го порядка.

Опираясь на это предложение, не трудно установить самую тесную связь между решениями первого вида и решениями топологической проблемы о четырех красках.

В самом деле, исходя, например, из решения первого вида и придавая многоугольникам I зоны попеременно значки a и b , а многоугольникам II зоны попеременно значки c и d , получим без труда решение проблемы о четырех красках: каждый многоугольник будет окрашен одной из четырех красок: a, b, c, d и притом так, что смежные многоугольники будут иметь различные окраски.

Или же, исходя из решения с 4-красками и относя многоугольники с красками a или b к зоне I, а многоугольники с красками c или d к зоне II, получим решение первого вида.

Таким образом топологическая проблема о четырех красках может быть рассматриваема как топологическая проблема о двух красках с решениями первого вида. Изучению этих решений я предполагаю посвятить одну из моих последующих работ.

TOPOLOOGILISE KAHEVÄRVIPROBLEEMI LAHENDEIST

Prof., füüs.-mat. tead. dr. H. Jaakson

Matemaatilise analüüsi kateeder

R e s ü m e e

Käesolev töö koosneb kolmest osast. Esimeses osas antakse topoloogilise kaardi mõiste, normaalkaardi mõiste, samuti taanduva ja taandumata kaardi mõisted ning näidatakse, kuidas igat taanduvat normaalkaarti võib tükeldada lõplikuks arvuks taandumatuid kaarte.

Töö teises osas formuleeritakse topoloogiline kahevärviprobleem. Probleemiseade esitatakse kahel viisil: ükskord ühenduses hulknurkade külgede värvimisega, teinekord ühenduses kaardi hulknurkade värvimisega. Mõlemad need viisid osutuvad samaväärseteks. Seoses probleemi seadmega antakse ka vööndite, vöönditevaheliste joonte ning lõpuks probleemi lahendite mõisted.

Töö kolmandas osas leiavad käsitlemist probleemi lahenditega seotud küsimused. Kolmanda osa, ühtlasi aga ka kogu töö tuumaks on lahendite olemasolu teoreem ning selle teoreemi tõestus. Sellele järgneb lihtsa menetluse esitamine, mis võimaldab sama kaardi kahest suvalisest lahendist üht lahendit teisendada teiseks lahendiks.

Lõpuks antakse kahevärvilahendite klassifikatsioon esimest ja teist liiki lahendeiks ning juhitakse tähelepanu sellele, et esimest liiki lahendite kaudu avaneb võimalus käsitleda topoloogilist neljavärviprobleemi spetsiaalse kahevärviprobleemina.

О СИММЕТРИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО ДИОФАНТОВА УРАВНЕНИЯ

Проф., докт. физ.-мат. наук Х. Яаксон

Кафедра математического анализа

Введение

1. В данной работе изучаются специальные решения диофантова уравнения

$$Cz = By + Ax \quad (1),$$

коэффициенты которого предполагаются целыми положительными числами, удовлетворяющими неравенствам

$$C > B > A \quad (2),$$

а специальные решения

$$z = \gamma, y = \beta, x = \alpha$$

определяются следующими условиями:

а) γ, β, α суть целые положительные числа,

$$\left. \begin{array}{l} \text{б) } C\gamma = B\beta + A\alpha \\ \text{в) } \gamma > \beta > \alpha \end{array} \right\} \quad (3)$$

Эти решения мы будем впредь называть симметрическими решениями уравнения (1).

Мы покажем, что необходимым и достаточным условием для существования симметрических решений является неравенство

$$C < B + A \quad (4)$$

Вместе с тем мы дадим способ нахождения этих решений.

Затем мы введем понятие о симметрических решениях уравнения (1), связанных с формой

$$(y, x)_{n-1} = y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + yx^{n-2} + x^{n-1},$$

а именно: F_n -решения (ферматовые решения типа n и $F_n^{(m)}$ -решения (квазиферматовые решения типа n и порядка m). F_2 -решения дей-

ствительно существуют и даются формулами, которые хорошо известны. Что же касается F_n -решений при $n \geq 3$, то так называемая последняя теорема Ферма (пока полностью еще недоказанная) отрицает их существование.

Но раз не существует F_n -решений (при $n \geq 3$), то возникает, на наш взгляд, вполне уместный вопрос, не имеется ли решений, которые, по налагаемым на них условиям, были бы более или менее близкими к несуществующим F_n -решениям. В качестве таких решений мы выдвигаем $F_n^{(m)}$ -решения ($m < n$). С ростом порядка m от 1 до $n - 1$ налагаемые на решения условия усиливаются, оставаясь все же слабее условий, налагаемых на F_n -решения. Поэтому можно надеяться, что, по крайней мере, для некоторых значений m и n найдутся соответствующие $F_n^{(m)}$ -решения.

В самом деле, в результате ориентировочных исследований в этом направлении мы установим существование бесконечного множества F_3^2 -решений.

Трактовка вопросов, касающихся F_3 -решений и F_3^m -решений, непосредственно связана с формой

$$(y, x)_2 = y^2 + xy + x^2 \quad (5)$$

С другой стороны, доказательство теоремы Ферма для $n = 3$, данное Эйлером, опирается на форму $y^2 + 3x^2$ и ее свойства. Для нас представляет интерес попытка, дать доказательство этой теоремы, базирующееся на форме (5) и на ее свойствах. Эту задачу мы поставим себе и решим в данной работе.

Получаемое таким образом доказательство можно рассматривать, как видоизмененное доказательство Эйлера.

I. Симметрические решения

2. Для существования симметрических решений уравнения (1) необходимо, чтобы имело место неравенство

$$C < B + A$$

В самом деле, при $C \geq B + A$ и $\gamma > \beta > \alpha$ мы имели бы $C\gamma > B\beta + A\alpha$. По той же причине и значения неизвестных должны удовлетворять аналогичному неравенству

$$\gamma < \beta + \alpha$$

Ниже мы увидим, что необходимое условие является в то же время и достаточным.

3. Обозначим через K, L, M следующие выражения:

$$K = C - B \quad (6)$$

$$L = A + B - C \quad (7)$$

$$M = B - A \quad (8)$$

Из (6) и (7) следует, что

$$K + L = A \quad (9)$$

и, принимая в расчет неравенства (2) и (4), ясно, что $K > 0$, $L > 0$, $M > 0$ и что

$$1 \leq K \leq A - 1, M \geq 1, A \geq 2.$$

Следовательно, коэффициенты A, B, C уравнения (1), удовлетворяющие неравенствам (2) и (4), даются формулами

$$\left. \begin{aligned} A &= 2, 3, 4 \dots \\ B &= A + M \quad (M = 1, 2, 3, \dots) \\ C &= A + M + K \quad (K = 1, 2, 3, \dots, A - 1) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

4. В случае, когда три коэффициента A, B, C имеют общим наибольшим делителем число $\delta > 1$, мы можем написать

$$A = \delta A_0, B = \delta B_0, C = \delta C_0,$$

где A_0, B_0, C_0 уже не имеют общего делителя, отличного от единицы, и уравнение (1) приводится к уравнению

$$C_0 z = B_0 y + A_0 x.$$

Имея это в виду, мы будем впредь полагать, что коэффициенты уравнения (1) A, B и C не имеют общего делителя, отличного от 1.

5. Следствием из сделанного только что предположения (п. 4) является, что числа C, K, L не имеют общего делителя, отличного от 1, так как такой делитель, в силу равенств (6) и (7), был бы общим делителем и коэффициентов уравнения (1) A, B и C .

6. Переходя теперь к нахождению симметрических решений уравнения (1), мы воспользуемся простым преобразованием уравнения (1), заменяя там z и y новыми неизвестными v и u при помощи формул

$$\left. \begin{aligned} u &= y - x \\ v &= z - y \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Отсюда $y = x + u$, $z = x + u + v$, $C(x + u + v) = B(x + u) + Ax$ или $Cu - Bu + Cv = Ax + Bx - Cx$ или, наконец, на основании формул (6) и (7)

$$Lx = Ku + Cv \quad (12)$$

Нетрудно увидеть, что симметрическому решению $z = \gamma$, $y = \beta$, $x = \alpha$ ($\alpha < \beta < \gamma$) уравнения (1) соответствует решение в целых положительных числах уравнения (12) $x = \alpha$, $u = \mu = \beta - \alpha$, $v = \nu = \gamma - \beta$ и, наоборот, решению уравнения (12) $x = \alpha$, $u = \mu$, $v = \nu$ ($\alpha > 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$) соответствует симметрическое решение уравнения (1)

$$x = \alpha, y = \alpha + \mu = \beta, z = \beta + \nu = \gamma.$$

Таким образом, нахождение симметрических решений уравнения (1) сводится к нахождению решений уравнения (12) в целых положительных числах.

7 Найдем общий наибольший делитель δ двух чисел: L и K . Когда δ окажется большим единицы $\delta > 1$, мы, на основании п. 5, можем быть уверены, что δ не является делителем числа C , а следовательно, принимая во внимание (12), δ является делителем числа v . Мы можем написать

$$K = \delta K_0, L = \delta L_0 \text{ и } v = \delta v_0,$$

и уравнение (12) после сокращения представится в виде

$$L_0 x = K_0 u + C v_0 \quad (12^a),$$

где L_0 и K_0 уже числа взаимнопростые. Поэтому уравнение (12^a) имеет решения в целых числах при всяком целом положительном значении $v_0 = \nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$), причем соответствующее значение v будет

$$v = \delta \nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

После выбора ν остается лишь решить уравнение

$$L_0 x \equiv C \nu \pmod{K_0},$$

что даст, как известно, бесконечно много целых значений для x . Среди них нас интересуют здесь лишь положительные значения $\alpha > 0$, которые даются формулой

$$\alpha = \alpha_0 + K_0 \tau \quad (\tau = 0, 1, 2, \dots), \quad (14)$$

где α_0 означает наименьшее положительное значение x

$$0 < \alpha_0 \leq K_0$$

значение $u = \mu$, соответствующее значениям $x = \alpha$ и $v_0 = \nu$, дается формулой

$$\mu = \frac{L_0 \alpha - C \nu}{K_0}, \quad (15)$$

из которой явствует, что для того, чтобы было $\mu > 0$, необходимо и достаточно, чтобы α удовлетворяло неравенству $L_0 \alpha - C \nu > 0$, или же

$$\alpha > \frac{C \nu}{L_0} \quad (16)$$

Но очевидно, что последнему неравенству удовлетворяют все значения α , даваемые формулой (14), за исключением, быть может, лишь конечного числа значений, соответствующих значениям параметра τ , меньшим известного предела.

Каждой паре значений α и ν соответствует симметрическое решение уравнения (1)

$$x = \alpha, y = \beta = \alpha + \mu, z = \gamma = \beta + \delta \nu.$$

Так как a и ν пробегают независимо друг от друга бесконечное множество целых положительных значений, то ясно, что уравнение (1), при выполнении условия (4), имеет ∞^2 симметрических решений. Необходимое условие (4) оказалось таким образом и достаточным условием.

Пример I.

$$4z = 3y + 2x; K = 1, L = 1, \delta = 1$$

$x = u + 4v$. Принимая $\nu = 1, \mu = 1$, мы получим

$$\begin{array}{r} \alpha = 5, \beta = 6, \gamma = 7 \\ 4 \quad 7 = 3 \quad 6 + 2 \quad 5. \end{array}$$

Пример II.

$$\begin{array}{l} 17z = 11y + 8x; K = 6, L = 2, \delta = 2 \\ K_0 = 3, L_0 = 1, v = 2v_0; x = 3u + 17v_0. \end{array}$$

Берем $v_0 = \nu = 1, \mu = 1$; тогда $\alpha = 20, \beta = 21, \gamma = 23$
 $17 \quad 23 = 11 \quad 21 + 8 \quad 20.$

Пример III.

$$\begin{array}{l} 35z = 26y + 15x; K = 9, L = 6, \delta = 3 \\ K_0 = 3, L_0 = 2, v = 3v_0; 2x = 3u + 35v_0; \end{array}$$

пусть $v = \nu = 1$, тогда $2x \equiv 35 \pmod{3}$; $\alpha_0 = 1$

$$\begin{array}{l} \alpha = 1 + 3\tau > \frac{35}{2}; \tau = 6, \alpha = 19, \mu = 1, \beta = 20, \gamma = 23; \\ 35 \quad 23 = 26 \quad 20 + 15 \quad 19. \end{array}$$

II. Симметрические решения, связанные с формой $(y, x)_{n-1}$

8. При наложении дополнительных условий на коэффициенты и на значения неизвестных в уравнении (1) может случиться, что первоначальное изобилие симметрических решений уступит место полному отсутствию решений, которые отвечали бы вновь предписанным условиям.

В самом деле, предпишем, чтобы коэффициенты уравнения (1) были даны формулами

$$\begin{array}{l} C = c^m, B = b^m, A = a^m \\ (c > b > a > 0, m > 0) \end{array} \quad (17).$$

Предпишем, с другой стороны, чтобы γ, β, α были вида

$$\gamma = c^{n-m}, \beta = b^{n-m}, \alpha = a^{n-m} \quad (n > m) \quad (18).$$

Симметрические решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (17) и (18), мы будем называть F_n -решениями (ферматовыми решениями типа n), а решения, удовлетворяющие тем же условиям, за исключением условия, выраженного последним равенством $\alpha = a^{n-m}$, мы будем называть $F_n^{(m)}$ -решениями (квазиферматовыми решениями типа n и порядка m).

Подставляя в равенство

$$C\gamma = B\beta + A\alpha$$

выражения для C , B , A , γ , β , α , данные формулами (17) и (18), мы получим, в случае F_n -решения,

$$c^n = b^n + a^n, \quad (19)$$

а в случае $F_n^{(m)}$ -решения,

$$c^n = b^n + a^m\alpha \quad (\alpha < b^{n-m}). \quad (20)$$

Вопрос о существовании тех и других решений сводится, таким образом, к тому, найдутся ли такие целые положительные значения c , b , a , n , которые удовлетворяли бы равенству (19), или же c , b , a , n , m , α , которые удовлетворяли бы равенству (20)

В случае $n = 2$ вопрос относительно первых из них уже давно решен утвердительно: F_2 -решения действительно существуют и даются, например, известными формулами ⁽¹⁾

$$\left. \begin{aligned} n(2m+n) &= \begin{cases} a & \text{при } n^2 < 2m^2 \\ b & \text{при } n^2 > 2m^2 \end{cases} \\ 2m(m+n) &= \begin{cases} b & \text{при } n^2 < 2m^2 \\ a & \text{при } n^2 > 2m^2 \end{cases} \\ 2m(m+n) + n^2 &= c \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где m и n суть взаимно простые целые положительные числа, n нечетное. С другой стороны, известная теорема Ферма, данная им без доказательства, утверждает, что уравнение (19) при $n \geq 3$ не имеет вовсе решений в целых числах, другими словами, что не существует F_n -решений типа, высшего, чем 2.

Что касается $F_n^{(m)}$ -решений, то мы ниже покажем, что, по крайней мере, при $n = 3$ такие решения действительно существуют, не только порядка $m = 1$, но и порядка $m = 2$.

Условия, налагаемые на $F_3^{(m)}$ -решения, слабее условий, налагаемых на F_3 -решения. Поэтому понятно, что одни из них оказываются выполнимыми, другие же — невыполнимыми.

9. При изучении вопросов, относящихся к F_n - и $F_n^{(m)}$ -решениям, мы имеем дело с равенствами (19) и (20). Перенеся в них b^n налево, можем левую часть при n нечетном представить в виде произведения двух сомножителей

$$c^n - b^n = (c - b)(c^{n-1} + c^{n-2}b + \dots + cb^{n-2} + b^{n-1}),$$

из которых второй множитель представляет собою бинарную форму $n - 1$ степени. Обозначим его для краткости символически

$$(c, b)_{n-1} = c^{n-1} + c^{n-2}b + \dots + cb^{n-2} + b^{n-1}, \quad (22)$$

и назовем c и b элементами, а $n - 1$ индексом символа.

Таким образом,

$$c^n - b^n = (c - b)(c, b)_{n-1}$$

и аналогично

$$b^n + a^n = [b - (-a)](b, -a)_{n-1}.$$

Отсюда явствует, что F_n - и $F_n^{(m)}$ -решения являются симметрическими решениями уравнения (1), связанными с формой $(y, x)_{n-1}$. В частности, F_3 - и $F_3^{(m)}$ -решения связаны с квадратичной формой

$$(y, x)_2 = y^2 + yx + x^2$$

с детерминантом $\Delta = -3$.

10. Пусть n нечетное простое число $n = p$ и пусть y и x взаимно простые целые числа. Тогда, как известно (2), $y - x$ и $(y, x)_{p-1}$ взаимно простые числа, за исключением случая, когда $y - x$ делится на p ; в этом и только в этом случае и $(y, x)_{p-1}$ делится на p , но не делится на p^i при $i > 1$, и общим наибольшим делителем $y - x$ и $(y, x)_{p-1}$ является p .

11. В последующем мы будем опираться на известные (3) предложения, относящиеся к квадратичной форме $(y, x)_2$ с взаимно простыми элементами y, x , а именно:

1) Когда какое-нибудь число D представляется формой $(y, x)_2$ $D = (C, B)_2$, то оно вида

$$D = 3^i [p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \dots p_r^{\pi_r}]^m, \quad (23)$$

где $i = 0$, или $i = 1$; $p_k (k = 1, 2, \dots, r)$ простые числа вида $3h_k + 1$, (h_k четное положительное число), $\pi_k \geq 1$, $m \geq 1$ и притом

2) число N различных представлений числа D (22) формой $(y, x)_2$ выражается формулой

$$N = 3 \cdot 2^{r+1} \quad (24)$$

3) Среди этих N представлений существенно различными считаются

$$3 \cdot 2^{r-1}$$

представлений:

$$D = (C_s, B_s)_2 = (C_s + B_s, -B_s)_2 = (C_s + B_s, -C_s)_2 \quad (25)$$

$$s = 1, 2, \dots, 2^{r-1}$$

Вся эта система Γ распадается на 2^{r-1} подсистем G_s по три представления в каждой.

4) Каждому из этих $3 \cdot 2^{r-1}$ представлений соответствуют еще по три представления, которые считаются несущественно различными. Так, представлению $D = (C_s, B_s)$ соответствуют несущественно различные представления

$$D = (-C_s, -B_s)_2 = (B_s, C_s) = (-B_s, -C_s)_2$$

$$D = (C_s + B_s, -B_s)_2 \text{ соответствуют}$$

$$D = (-C_s - B_s, B_s)_2 = (-B_s, C_s + B_s)_2 = (B_s, -C_s - B_s)_2$$

и, наконец, $D = (C_s + B_s, -C_s)_2$ соответствуют

$$D = (-C_s - B_s, C_s)_2 = (-C_s, C_s + B_s)_2 = (C_s, -C_s - B_s)_2 \\ (s = 1, 2, \quad 2^{r-1}).$$

12. Из приведенных в п. 11 предложений следует, что придавая, в частности, в формуле (23) числу m значения: $m = 1$ и $m = 3$ и обозначая значение D при $m = 1$ через $3^i d$

$$3^i d = 3^i p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \quad p_r^{\pi_r} \quad (i = 0, 1) \quad (26)$$

два числа: $3^i d$, $3^i d^3$ имеют одно и то же число N представлений формой $(y, x)_2$

$$N = 3 \cdot 2^{r+1}$$

и среди них также одно и то же число $3 \cdot 2^{r-1}$ существенно различных представлений:

$$3^i d^3 = (C_s, B_s)_2 = (C_s + B_s, -B_s)_2 = (C_s + B_s, -C_s)_2 \\ s = 1, 2, \quad 2^{r-1}$$

$$3^i d = (c_s, b_s)_2 = (c_s + b_s, -b_s)_2 = (c_s + b_s, -c_s)_2 \\ C_s > B_s > 0, \quad c_s > b_s > 0.$$

Установим теперь между элементами C_s, B_s, c_s, b_s форм $(C_s, B_s)_2$ и $(c_s, b_s)_2$ некоторые зависимости.

III. Некоторые свойства квадратичной формы $(y, x)_2$

13. Теорема I.

Пусть c_s и b_s взаимно простые положительные числа $(c_s > b_s > 0)$, пусть

$$(c_s, b_s)_2 = 3^i d \quad (i = 0, 1)$$

(d и 3 взаимно простые числа)

и пусть

$$\left. \begin{aligned} 3^i C'_s &= c_s^3 + 3c_s^2 b_s - b_s^3 \\ 3^i B'_s &= b_s^3 + 3b_s^2 c_s - c_s^3 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

тогда

$$(C'_s, B'_s)_2 = 3^i d^3 \quad (i = 0, 1)$$

В самом деле, при помощи простых вычислений не трудно убедиться в том, что, с одной стороны,

$$(3^i C'_s, 3^i B'_s)_2 = (c_s^3 + 3c_s^2 b_s - b_s^3)^2 + (c_s^3 + 3c_s^2 b_s - b_s^3) \\ (b_s^3 + 3b_s^2 c_s - c_s^3) + (b_s^3 + 3b_s^2 c_s - c_s^3)^2 = c_s^6 + 3c_s^5 b_s + \\ + 6c_s^4 b_s^2 + 7c_s^3 b_s^3 + 6c_s^2 b_s^4 + 3c_s b_s^5 + b_s^6,$$

а, с другой стороны, и

$$(c_s, b_s)_2^3 = (c_s^2 + c_s b_s + b_s^2)^3 = c_s^6 + 3c_s^5 b_s + 6c_s^4 b_s^2 + 7c_s^3 b_s^3 + 6c_s^2 b_s^4 + 3c_s b_s^5 + b_s^6,$$

так что $(3^i C_s' \ 3^i B_s')_2 = (c_s, b_s)_2^3$, а отсюда при $i=0$ $(C_s', B_s')_2 = d^3$, а при $i=1$ левая часть $(3^i C_s' \ 3^i B_s')_2 = 3^2 (C_s', B_s')_2$ и правая часть $(c_s, b_s)_2^3 = (3d)^3 = 3^3 d^3$, следовательно, $3^2 (C_s' \ B_s')_2 = 3^3 d^3$ или же $(C_s' \ B_s')_2 = 3d^3$ чем теорема и доказана.

14. По теореме I представлению числа $3^i d$

$$(c_s, b_s)_2 = 3^i d \quad (i=0,1)$$

соответствует представлению числа $3^i d^3$

$$(C_s', B_s')_2 = 3^i d^3 \quad (i=0,1),$$

где C_s' и B_s' определяются формулами (27).

Пусть теперь s пробежит все возможные значения $s=1, 2, \dots, l$, $l=2^{r-1}$ (п. 12). Тогда l представлений числа $3^i d$ ($i=0,1$) дадут l представлений числа $3^i d^3$:

$$3^i d^3 = (C_1' \ B_1')_2 = (C_2' \ B_2')_2 = \dots = (C_l' \ B_l')_2.$$

Возникает вопрос, могут ли какие-нибудь два представления, соответствующие значениям $s=s_1$ и $s=s_2$.

$$(C_{s_1}', B_{s_1}')_2 \text{ и } (C_{s_2}', B_{s_2}')_2,$$

совпадать друг с другом или же с какими-нибудь двумя представлениями из одной и той же системы G_s :

$$(C_s, B_s)_2, (C_s + B_s, -B_s)_2, (C_s + B_s, -C_s)_2?$$

Ответ на этот вопрос дает

Теорема II. Два какие-нибудь представления числа $3^i d^3 = (C_{s_1}', B_{s_1}')_2 = (C_{s_2}', B_{s_2}')_2$, элементы которых определяются формулами (27), не совпадают друг с другом и не принадлежат обе одной и той же системе G_s :

$$(C_s, B_s)_2, (C_s + B_s, -B_s)_2, (C_s + B_s, -C_s)_2.$$

Приступая к доказательству теоремы, будем иметь в виду, что элементы, входящие в одну из трех пар:

$$c_{s_1}, b_{s_1}; c_{s_2}, b_{s_2}; C_s, B_s,$$

суть взаимно простые положительные числа (п.п. 11, 12)

$$c_{s_1} > b_{s_1} > 0; \quad c_{s_2} > b_{s_2} > 0; \quad C_s > B_s > 0$$

и что, на основании формул (27),

$$C_s' + B_s' = 3^{i-1} c_s b_s (c_s + b_s) \quad (s=1, 2, \dots, 2^{r-1}). \quad (28)$$

Допустим теперь, что $C_{s_1}' = C_{s_2}'$ и $B_{s_1}' = B_{s_2}'$. Отсюда следовало бы, что $C_{s_1}' + B_{s_1}' = C_{s_2}' + B_{s_2}'$, т. е. в силу (28),

$$c_{s_1} b_{s_1} (c_{s_1} + b_{s_1}) = c_{s_2} b_{s_2} (c_{s_2} + b_{s_2}).$$

В действительности же, как в этом не трудно убедиться, такое равенство не может иметь места.

В самом деле, из предположения, что $(c_{s_2}, b_{s_2})_2$ и $(c_{s_1}, b_{s_1})_2$ представляют собою два различных представления числа $3^i d$ и что

$$0 < b_{s_1} < c_{s_1}; \quad 0 < b_{s_2} < c_{s_2},$$

вытекает с необходимостью, что $b_{s_1} \neq b_{s_2}$ и $c_{s_1} \neq c_{s_2}$; при этом неравенству $b_{s_1} < b_{s_2}$ соответствует неравенство $c_{s_1} > c_{s_2}$ и неравенству $b_{s_1} > b_{s_2}$ — неравенство $c_{s_1} < c_{s_2}$. Ведь произведения $c_{s_1} b_{s_1} (c_{s_1} + b_{s_1})$ и $c_{s_2} b_{s_2} (c_{s_2} + b_{s_2})$ являются значениями функции $P = yx(y + x)$, где переменные x и y подвержены дополнительному условию $(y, x)_2 = 3^i d$. Благодаря этому P может быть рассматриваема как функция одной независимой переменной, скажем x . Вычисления дают $\frac{dP}{dx} = \frac{(y-x)(2 \cdot 3^i d + 3xy)}{2y+x}$, откуда яв-

ствует, что при $0 \leq x < y$ $\frac{dP}{dx} > 0$, т. е. при возрастании x от 0 до $x = y = +\sqrt{\frac{3^i d}{3}}$ P монотонно возрастает от 0 до $2\left(\frac{3^i d}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, так что $c_{s_1} b_{s_1} (c_{s_1} + b_{s_1}) \leq c_{s_2} b_{s_2} (c_{s_2} + b_{s_2})$ при $b_{s_1} \leq b_{s_2}$.

Этим первая часть теоремы доказана.

Вторую часть теоремы мы докажем также от противного. Допустим, что в какой-нибудь системе G_s , состоящей из трех существенно различных представлений числа $3^i d^3$, два представления (т. е. I и II, либо I и III, либо II и III) совпадают с представлениями того же числа $(C_{s_2}', B_{s_2}')_2$, построенными при помощи формул (27). Во всех трех случаях из нашего допущения следует, что C_s и B_s имеют общий делитель, больший единицы. В самом деле, пусть, например, $C_s = C_{s_1}'$, $B_s = B_{s_1}'$ и $C_s + B_s = C_{s_2}'$, $-B_s = B_{s_2}'$; но тогда, имея в виду и формулу (28),

будем иметь $C_s + B_s = C_{s_1}' + B_{s_1}' = 3^{1-i} c_{s_1} b_{s_1} (c_{s_1} + b_{s_1}) \equiv 0 \pmod{2}$

и $C_s = (C_s + B_s) + (-B_s) = C_{s_2}' + B_{s_2}' = 3^{1-i} c_{s_2} b_{s_2} (c_{s_2} + b_{s_2}) \equiv 0 \pmod{2}$, так что и $B_s \equiv 0 \pmod{2}$.

и $C_s = (C_s + B_s) + (-B_s) = C_{s_2}' + B_{s_2}' = 3^{1-i} c_{s_2} b_{s_2} (c_{s_2} + b_{s_2}) \equiv 0 \pmod{2}$, так что и $B_s \equiv 0 \pmod{2}$.

и $C_s = (C_s + B_s) + (-B_s) = C_{s_2}' + B_{s_2}' = 3^{1-i} c_{s_2} b_{s_2} (c_{s_2} + b_{s_2}) \equiv 0 \pmod{2}$, так что и $B_s \equiv 0 \pmod{2}$.

и $C_s = (C_s + B_s) + (-B_s) = C_{s_2}' + B_{s_2}' = 3^{1-i} c_{s_2} b_{s_2} (c_{s_2} + b_{s_2}) \equiv 0 \pmod{2}$, так что и $B_s \equiv 0 \pmod{2}$.

и $C_s = (C_s + B_s) + (-B_s) = C_{s_2}' + B_{s_2}' = 3^{1-i} c_{s_2} b_{s_2} (c_{s_2} + b_{s_2}) \equiv 0 \pmod{2}$, так что и $B_s \equiv 0 \pmod{2}$.

и $C_s = (C_s + B_s) + (-B_s) = C_{s_2}' + B_{s_2}' = 3^{1-i} c_{s_2} b_{s_2} (c_{s_2} + b_{s_2}) \equiv 0 \pmod{2}$, так что и $B_s \equiv 0 \pmod{2}$.

и $C_s = (C_s + B_s) + (-B_s) = C_{s_2}' + B_{s_2}' = 3^{1-i} c_{s_2} b_{s_2} (c_{s_2} + b_{s_2}) \equiv 0 \pmod{2}$, так что и $B_s \equiv 0 \pmod{2}$.

В двух остальных случаях получается совершенно аналогично тот же самый результат. В действительности же C_s и B_s являются взаимно простыми числами, откуда заключаем, что сделанное допущение ошибочно, а этим и доказана вторая часть теоремы.

15. Следствие из теорем I и II. Каждая из $l = 2^{r-1}$ подсистем G_s системы Γ существенно различных представлений числа $3^i d^3$ содержит одно и только одно представление, совпадающее с одним из l представлений (C_s', B_s') , построенных при помощи формул (26) по элементам l представлений числа $3^i d = (c_s, b_s)_2$ ($i = 0, 1$), ($s = 1, 2, \dots, 2^{r-1}$), ($c_s > b_s > 0$).

Так как $c_s > b_s > 0$, то по первой формуле (27) $C_s' > 0$; принимая во внимание формулу (28), мы можем отметить, что и $C_s' + B_s' > 0$, т. е. $C_s' > |B_s'|$, а значит, согласно п. 11, представление числа $3^i d^3 = (C_s', B_s')_2$ входит в систему Γ существенно различных представлений этого числа квадратичной формой $(y, x)_2$, следовательно, и в одну из подсистем G_s системы Γ . Число подсистем G_s и число представлений $(C_s', B_s')_2$ одно и то же ($l = 2^{r-1}$). Каждые два представления вида $(C_s', B_s')_2$ отличны друг от друга и, наконец, в одну и ту же подсистему G_s не входит более одного представления $(C_s', B_s')_2$; значит, следствие этим и доказано.

16. Теорема III. Когда представление числа $3^i d^3 = (C_s', B_s')_2$, построенное при помощи формул (27) по элементам представления $3^i d = (c_s, b_s)_2$, входит в подсистему G_s :

$$(C_s, B_s)_2, (C_s + B_s, -B_s)_2, (C_s + B_s, -C_s)_2,$$

то оно совпадает с первым из них

$$C_s' = C_s, B_s' = B_s \text{ при } B_s' > 0,$$

со вторым из них

$$C_s' = C_s + B_s, B_s' = -B_s \\ \text{при } B_s' < 0 \text{ и } C_s' + 2B_s' > 0$$

и, наконец, с третьим из них

$$C_s' = C_s + B_s, B_s' = -C_s \\ \text{при } B_s' < 0 \text{ и } C_s' + 2B_s' < 0.$$

В самом деле, как мы видели выше, $C_s' > 0$. Когда, кроме того, и $B_s' > 0$, то ясно, что $(C_s', B_s')_2$ совпадает с $(C_s, B_s)_2$, так как в подсистеме G_s имеется лишь одно представление, оба элемента которого суть положительные числа.

Во втором случае, из предположения, что $C_s' = C_s + B_s$ и $B_s' = -B_s$, следует, что $B_s = -B_s'$, $C_s = C_s' - B_s = C_s' + B_s'$ и, принимая во внимание, что $C_s > B_s$, мы находим, что $C_s' + 2B_s' > 0$.

Наоборот, из неравенств $B_s' < 0$ и $C_s' + 2B_s' > 0$ легко вывести заключение о совпадении $(C_s', B_s')_2$ с $(C_s + B_s, -B_s)_2$, так как, допуская противное, мы получили бы $C_s' = C_s + B_s$, $B_s' = -C_s$, откуда $C_s = -B_s'$, $B_s = C_s' - C_s = C_s' + B_s'$. Из $B_s < C_s$ следовало бы $C_s' + B_s' < -B_s'$ т. е. $C_s' + 2B_s' < 0$, что противоречит, однако, нашему предположению. Аналогично, исходя из неравенства $C_s' + 2B_s' < 0$ нетрудно заключить о совпадении $(C_s', B_s')_2$ с $(C_s + B_s, -C_s)_2$. Теорема доказана.

17. Следствие из теоремы III.

Когда в представлении числа $d^3 = (C_s, B_s)_2$ ($i=0$) ни C_s , ни B_s не делится на 3 ($C_s > B_s > 0$), то $(C_s, B_s)_2$ совпадает с $(C_s', B_s')_2$, полученным при помощи формул (26) и входящим в ту же подсистему G_s , что и $(C_s, B_s)_2$.

Ясно, что нам нужно лишь убедиться в том, что при нашем предположении B_s должно быть положительным числом. Но, в самом деле, это так, ибо при $B_s' < 0$, как мы видели при доказательстве теоремы III, либо $C_s = C_s' + B_s'$, либо $B_s' = C_s' + B_s'$, но по формуле (28), принимая теперь $i=0$, мы имели бы $C_s' + B_s' = 3c_s b_s (c_s + b_s)$, откуда либо $C_s \equiv 0 \pmod{3}$, либо $B_s \equiv 0 \pmod{3}$, но ни то, ни другое не соответствует нашему предположению.

18. Иллюстрируем вышесказанное на примерах. Пусть $d = 7 \quad 13 \quad 19 = 1729$; здесь $r = 3$; $l = 2^{3-1} = 4$. Среди представлений числа 1729 квадратичной формой $(y, x)_2$ имеется 4 представления вида $(c_s, b_s)_2$ ($c_s' > b_s > 0$):

$$1729 = (40, 3)_2 = (37, 8)_2 = (32, 15)_2 = (25, 23)_2;$$

соответственные значения произведения

$$c_s b_s (c_s + b_s) \quad \text{суть:}$$

$$5160 < 13320 < 22560 < 27600$$

По элементам c_s, b_s этих четырех представлений можно, при помощи формул (27), построить 4 представления числа 1729^3 вида $(C_s', B_s')_2$; мы получим соответственно:

$$\begin{aligned} 1729^3 &= (78373, -62893)_2 = (82997, -43037)_2 = \\ &= (75473, -7793)_2 = (46583, 36217)_2 \end{aligned}$$

Среди значений B_s' : $-62893, -43037, -7793, 36217$ первые три значения < 0 , последнее > 0 , причем среди отрицательных значений два первых удовлетворяют неравенству $C_s' + 2B_s' < 0$, $78373 + 2(-62893) < 0$, $82997 + 2(-43037) < 0$, в то время как последнее удовлетворяет неравенству $C_s' + 2B_s' > 0$, $75473 + 2(-7793) > 0$.

Исходя из вышеприведенных четырех представлений числа 1729^3 , легко выписать всю систему Γ существенно различных представлений числа 1729^3 , состоящую из 4 подсистем G_s :

$$\begin{aligned}
 1729^3 &= (62893, 15480)_2 = (78373, -15480)_2 = (78373, -62893)_2 \\
 &= (43037, 39960)_2 = (82997, -39960)_2 = (82997, -43037)_2 \\
 &= (67680, 7793)_2 = (75473, -7793)_2 = (75473, -67680)_2 \\
 &= (46583, 36217)_2 = (82800, -36217)_2 = (82800, -46583)_2.
 \end{aligned}$$

В каждую из этих четырех подсистем G_s входит по одному представлению $(C_s', B_s')_2$; они выше подчеркнуты. Из них одно занимает первое место и соответствует $B_s' > 0$; из $C_s = 46583$ и $B_s = 36217$ ни то, ни другое не делится на 3. Другое занимает второе место, $B_s' < 0$, но $C_s' + 2B_s' > 0$ и $C_s = 67680 \equiv 0 \pmod{3}$; два остальных занимают третье место, $B_s' < 0$ и $C_s' + 2B_s' < 0$; соответственные значения $B_s \div 15480, 39960$ делятся оба на 3.

19. Пусть $3^i d = (c, b)_2 = (c + b, -b)_2 = (c + b, -c)_2$ ($i = 0, 1$), $c > b > 0$. Обозначим разности элементов соответственно через

$$\begin{aligned}
 v_1 &= c - b, \quad v_2 = c + b - (-b) = c + 2b \quad \text{и} \\
 v_3 &= c + b - (-c) = 2c + b
 \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}
 0 < v_1 < v_2 < v_3 \quad \text{и} \\
 v_3 &= v_2 + v_1 \quad \text{)} \quad (29)
 \end{aligned}$$

Построим по элементам c, b при помощи формул (27) представление числа $3^i d^3 = (C', B')_2$ и обозначим через V разность элементов

$$V = C' - B'$$

Интересное соотношение между V , с одной стороны, и между v_1, v_2 и v_3 , с другой стороны, устанавливает

Теорема IV Когда C' и B' определены формулами (26), то

$$C' - B' = \frac{(c-b)(2b+c)(2c+b)}{3^i} \quad (i = 0, 1). \quad (30)$$

В самом деле, формулы (27) дают

$$\begin{aligned}
 3^i C' - 3^i B' &= 2(c^3 - b^3) + 3cb(c - b) = \\
 &= (c - b)[2(c, b)_2 + 3bc] = (c - b)[2c^2 + cb + 2b^2 + 4bc] = \\
 &= (c - b)[c(2c + b) + 2b(b + 2c)] = (c - b)(2b + c)(2c + b).
 \end{aligned}$$

Теорема этим доказана.

20. Следствие из теоремы IV.

При $i = 1$ $C' - B'$ делится на 3^h , где $h > 1$.

Действительно, при $i = 1$ каждая из трех разностей v_1, v_2, v_3 делится на 3 (п. 10) следовательно, их произведение $v_1 v_2 v_3$ делится по крайней мере на 3^3 и $C' - B' = \frac{v_1 v_2 v_3}{3}$ по крайней мере на 3^2 , т. е. на 3^h , где $h > 1$.

21. Пусть m взаимно простое с числом 3 и пусть

$$3m = (c, b)_2 = (c + b, -b)_2 = (c + b, -c)_2.$$

Как мы выше видели (п. 10), все три разности $v_1 = (c - b)$, $v_2 = (2b + c)$, $v_3 = (2c + b)$ делятся на 3^h при $h = 1$. Возникает вопрос, сколько из них делятся на 3^h при $h > 1$? Ответ на поставленный вопрос дает

Теорема V Когда одно из трех чисел $(c - b)$, $(2b + c)$, $(2c + b)$ ($c > b > 0$, c и b взаимно простые числа) делится на 3^h при $h > 1$, другие два из них не делятся на 3^h при $h > 1$.

Чтобы убедиться в этом, будем иметь в виду следующие соотношения между этими числами:

$$\left. \begin{aligned} 2b + c &= (c - b) + 3b, & 2c + b &= (c - b) + (2b + c) \\ c - b &= 3c - (2c + b) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Примем также во внимание, что ни b , ни c не может делиться на 3, так как из допущения, что одно из них, скажем, b , делится на 3, следовало бы, в силу $3m = (c, b)_2$, что и c должно было бы делиться на 3. Наконец, мы воспользуемся известным предложением, что в случае суммы или разности двух чисел из факта делимости одного числа на 3^h $h > 1$, а другого числа лишь на 3, следует, что и сумма и разность таких чисел делятся только на 3, но не делятся на 3^h , $h > 1$.

Допустим теперь: 1) что $c - b \equiv 0 \pmod{3^h}$, $h > 1$. Из первого и второго соотношения (31) следует, что $2b + c$ и $2c + b$ не делятся на 3^h при $h > 1$;

2) пусть $2b + c \equiv 0 \pmod{3^h}$, $h > 1$; из первого и второго соотношения (31) опять-таки следует, что ни $c - b$, ни $2c + b$ не делятся на 3^h при $h > 1$;

3) пусть, наконец, $2c + b \equiv 0 \pmod{3^h}$, $h > 1$; из третьего и второго соотношения (31) следует, что ни $c - b$, ни $2b + c$ не делятся на 3^h при $h > 1$. Этим теорема доказана. В частности, отождествляя m с d или же с d^3 и применяя теорему V в случае, когда $3d = (c, b)_2$ или же $3d^3 = (C, B)_2$, ($c > b > 0$, $C > B > 0$), можем сказать, что из трех чисел $c - b$, $2b + c$, $2c + b$, равно как из трех чисел $C - B$, $2B + C$, $2C + B$, лишь одно число может делиться на 3^h при $h > 1$, в то время как остальные делятся лишь на 3.

22. Следствие из теоремы V

Когда $3d^3 = (C, B)_2$ ($C > B > 0$), где C и B взаимно простые числа, то из трех чисел

$$C - B, 2B + C, 2C + B$$

только одно делится на 3^h при $h > 1$ и именно то из них, которое соответствует представлению числа $3d^3$, совпадающему с представлением

$(C', B')_2$, построенным при помощи формул (27) по элементам некоторого представления числа $3d = (c, b)_2$.

В самом деле, числа $C - B$, $2B + C$, $2C + B$ соответствуют трем представлениям числа $3d^3$, составляющим одну подсистему G .

Каждая же подсистема G содержит одно и только одно представление, совпадающее с $(C', B')_2$, построенным по элементам c, b некоторого $(c, b)_2 = 3d$. Разность элементов его $= C' - B'$ а $C' - B'$, по следствию из теоремы IV (п. 20), действительно делится на 3^h при $h > 1$, а следовательно, на основании теоремы V, два другие числа уже не делятся на 3^h при $h > 1$.

23. Познакомившись с некоторыми соотношениями между b и c , с одной стороны, и B, C , с другой стороны, при $(c, b)_2 = 3^i d$ и $(C, B)_2 = 3^i d^3$ ($i = 0, 1$) установим теперь также следующее простое соотношение между b, c и \bar{b}, \bar{c} при

$$(c, b)_2 = d \text{ и } (\bar{c}, \bar{b})'_2 = 3d.$$

Теорема VI. Когда $(c, b)_2 = d$, где d не делится на 3, то, полагая

$$\left. \begin{aligned} \bar{c} &= c + 2b \\ \bar{b} &= c - b \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

получится представление числа $3d$

$$(\bar{c}, \bar{b})_2 = 3d.$$

В самом деле, согласно предположению,

$$(c, b)_2 = d, \text{ т. е. } c^2 + cb + b^2 = d.$$

С другой стороны, по формулам (32) $(\bar{c}, \bar{b})_2 = (c + 2b)^2 + (c + 2b)(c - b) + (c - b)^2$, а это последнее выражение, после раскрытия скобок и приведения подобных членов, примет вид

$$3c^2 + 3cb + 3b^2 = 3d.$$

Этим теорема и доказана.

24. Приведем для иллюстрации несколько примеров.

В п. 18 уже отмечено, что

$$1729 = (40, 3)_2 = (37, 8)_2 = (32, 15)_2 = (25, 23)_2.$$

Воспользовавшись формулами (32), мы получим

$$3 \cdot 1729 = (46, 37)_2 = (53, 29)_2 = (62, 17)_2 = (71, 2)_2.$$

Применяя формулы (27), мы получим соответственно

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1729^3 &= (93853, 47413)_2 = (122957, 3077)_2 = \\ &= (143153, -59887)_2 = (129383, -119017)_2. \end{aligned}$$

Разности элементов этих четырех форм должны делиться на 3^h

при $h > 1$ (следствие из теоремы (V)). В самом деле, эти разности суть:

$$\begin{aligned} 46440 &= 3^3 \cdot 1720 \\ 119880 &= 3^4 \cdot 1480 \\ 203040 &= 3^3 \cdot 7520 \\ 248400 &= 3^3 \cdot 9200. \end{aligned}$$

Каждая из этих четырех форм входит в одну из полсистем G , содержащих по три существенно различных представления числа $3 \cdot 1729^3$. Две первые формы занимают каждая в своей подсистеме первое место, так как оба элемента > 0 , третья форма занимает второе место ($143153 + 2(-59887) > 0$), а четвертая занимает третье место ($129383 + 2(-119017) < 0$). Имея это в виду, нетрудно выписать все существенно различные представления числа $3 \cdot 1729^3$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1729^3 &= (93853, 47413)_2 = (141266, -47413)_2 = \\ &= (141266, -93853)_2 = (122957, 3077)_2 = (126034, -3077)_2 = \\ &= (126034, -122957)_2 = (83266, 59887)_2 = (143153, -59887)_2 = \\ &= (143153, -83266)_2 = (119017, 10366)_2 = (129383, -10366)_2 = \\ &= (129383, -119017)_2. \end{aligned}$$

Формы, полученные при помощи формул (27), здесь подчеркнуты. Разности элементов этих форм, как уже выше отмечено, делятся на 3^h при $h > 1$. Разности элементов всех остальных форм, как в этом нетрудно убедиться, не делятся на 3^h при $h > 1$, но делятся лишь на 3.

Берем одну из подчеркнутых форм, скажем $3 \cdot 1729^3 = (129383, -119017)_2$. Разность элементов этой формы $V = 248400 = 3^3 \cdot 9200$. Проверим формулу (30) (теорема IV, п. 19). Этой форме соответствует форма $3 \cdot 1729 = (71, 2)_2$. Вместе с нею в одну и ту же подсистему G входят еще формы $(73, -2)_2$ и $(73, -71)_2$, представляющие также число $3 \cdot 1729$. Разности элементов у них v_1, v_2, v_3 суть соответственно: $v_1 = 69, v_2 = 75, v_3 = 144$.

Не трудно убедиться в том, что действительно $V = \frac{v_1 v_2 v_3}{3}$ т. е.

$$248\,400 = \frac{69 \cdot 75 \cdot 144}{3}$$

IV. F_3 -решения и $F_3^{(2)}$ -решения

25. Применим теперь полученные выше результаты при доказательстве теоремы Ферма для случая, когда $p = 3$.

Неопределенное уравнение $z^3 = y^3 + x^3$ не имеет решений в целых числах.

Докажем теорему *сi* противного. Допустим, что существуют целые числа C, B, A , удовлетворяющие этому уравнению: $C^3 =$

$= B^3 + A^3$. При этом, нисколько не ограничивая общности, можно считать, что $C > 0$, $B > 0$, $A > 0$ и что C , B и A попарно взаимно простые числа.

Мыслимы две возможности:

- 1) либо ни одно из трех чисел C , B , A не делится на 3,
- 2) либо одно из этих чисел делится на 3.

Разберем сначала первый случай.

Из равенства $C^3 = B^3 + A^3$ следует, что

$$(C_1 B)_2 = d^3, C - B = d_1^3, A = dd_1,$$

где d и d_1 взаимно простые положительные целые числа (п. 10).

На основании следствия из теоремы III $(C, B)_2$ совпадает с одним из представлений числа $d^3 = (C', B')_2$, построенным при помощи формул (27) по элементам одного из представлений числа $d = (c, b)_2$, где $c > b > 0$ и c, b взаимно простые числа $C = C'$, $B = B'$ а, значит, и $C - B = C' - B'$. Но, с одной стороны, $C - B = d_1^3$; с другой стороны, на основании теоремы IV, при $i = 0$

$$C' - B' = (c - b)(2b + c)(2c + b),$$

так что

$$d_1^3 = (c - b)(2b + c)(2c + b).$$

Так как c и b взаимно простые числа, то должны быть попарно взаимно простыми и сомножители $(c - b)$, $(2b + c)$ и $(2c + b)$, а отсюда непосредственно следует, что каждый из них в отдельности должен быть полным кубом:

$$c - b = \delta_1^3, 2b + c = \delta_2^3, 2c + b = \delta_3^3, d_1 = \delta_1 \delta_2 \delta_3.$$

Кроме того, $2c + b = (2b + c) + (c - b)$, так что $\delta_3^3 = \delta_2^3 + \delta_1^3$, $\delta_3 > \delta_2 > \delta_1 > 0$ и ни одно из $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ не делится на 3.

Таким образом, из допущения существования решения $z = C$, $y = B$, $x = A$ следует, что существует такого же рода решение

$$z = \delta_3, y = \delta_2, x = \delta_1, \text{ где, однако, уже } \delta_3 < C.$$

Отсюда, в свою очередь, следовало бы опять-таки существование нового решения с еще меньшим положительным значением z и т. д. и т. д. без конца, чего, однако, быть не может. Значит, теорема доказана при предпосылке, что ни одно из чисел C, B, A не делится на 3.

Допустим теперь, что $C^3 = B^3 + A^3$ и при этом одно из чисел C, B, A делится на 3.

Тогда, на основании п. 10, следует, что $(C'' B'')_2 = 3d^3$, $C'' - B'' = 3^{3m-1}d_1^3$ где $m \geq 1$, d и d_1 положительные взаимно простые числа, не делящиеся на 3, причем

$$\begin{aligned} C'' = C, B'' = B, & \text{ когда } A \equiv 0 \pmod{3} \quad (A = 3^m d d_1), \\ C'' = C, B'' = A, & \text{ когда } B \equiv 0 \pmod{3} \quad (B = 3^m d d_1), \\ C'' = B, B'' = -A, & \text{ когда } C \equiv 0 \pmod{3} \quad (C = 3^m d d_1) \end{aligned}$$

Так как $C'' - B''$ делится на 3^{3m-1} , где $3m - 1 > 1$, то, на основании следствия из теоремы V, представление числа $3d^3 = (C'', B'')_2$ совпадает с одним из представлений того же числа $3d^3 = (C'', B'')_2$, построенным при помощи формул (27) по элементам одного из представлений числа $3d = (c, b)_2$, где c, b суть положительные взаимно простые числа, $C'' = C', B'' = B', C'' - B'' = C' - B'$

Но на основании теоремы IV при $i = 1$

$$C' - B' = \frac{(c-b)(2b+c)(2c+b)}{3}, \quad \text{так что}$$

$$3^{3m-1}d_1^3 = \frac{(c-b)(2b+c)(2c+b)}{3} \quad \text{или же} \quad d_1^3 = \frac{(c-b)(2b+c)(2c+b)}{3^{3m}}$$

На основании теоремы V лишь одно из трех чисел $(c-b)$, $(2b+c)$ и $(2c+b)$ может делиться на 3^h при $h > 1$, между тем как другие два делятся лишь на 3. Помимо делителя 3 эти три числа не могут иметь попарно никакого иного делителя, отличного от 1.

Выберем три положительные числа k_1, k_2, k_3 так, чтобы их сумма равнялась $3m$, $k_1 + k_2 + k_3 = 3m$, два из них равнялись бы 1, а третье $3m - 2$. Мы можем написать $d_1^3 = \frac{c-b}{3^{k_1}}, \frac{2b+c}{3^{k_2}}$.

$$\frac{2c+b}{3^{k_3}}$$

Предположим, что значения k_1, k_2, k_3 выбраны так, что каждый из трех числителей делится на соответствующую степень числа 3. Тогда в дробном виде написанные сомножители в правой части равенства суть целые положительные и попарно взаимно простые числа, так что каждый из них в отдельности должен быть полным кубом

$$\frac{c-b}{3^{k_1}} = \delta_1^3, \quad \frac{2b+c}{3^{k_2}} = \delta_2^3, \quad \frac{2c+b}{3^{k_3}}; \quad d_1 = \delta_1 \delta_2 \delta_3.$$

Но так как $2c+b = (2b+c) + (c-b)$, то получится соотношение $3^{k_3} \delta_3^3 = 3^{k_2} \delta_2^3 + 3^{k_1} \delta_1^3$ которое переписется либо в виде

$$(3^{m-1} \delta_3)^3 = \delta_2^3 + \delta_1^3, \quad \text{когда } k_1 = 1 = k_2, \text{ а } k_3 = 3m - 2,$$

либо в виде

$$\delta_3^3 = (3^{m-1} \delta_2)^3 + \delta_1^3, \quad \text{когда } k_1 = 1 = k_3, \text{ а } k_2 = 3m - 2,$$

либо, наконец, в виде

$$\delta_3^3 = \delta_2^3 + (3^{m-1} \delta_1)^3, \quad \text{когда } k_2 = 1 = k_3, \text{ а } k_1 = 3m - 2.$$

В каждом из этих трех случаев получается таким образом новое решение уравнения $z^3 = y^3 + x^3$, совершенно аналогичное исходному решению, с той лишь разницей, что показатель степени числа 3, на которую делится одно из трех чисел, составляющих решение уравнения, уменьшился на 1. Повторяя прежние рас-

суждения, мы получим решение, при котором показатель степени снова снизится на 1 и т. д. и т. д. Ясно, что поступая так, мы дойдем наконец до решения, при котором показатель степени становится равным нулю, т. е. где ни одно из трех чисел, составляющих решение уравнения, не делится на 3. Но, как мы выше уже показали, это невозможно. Значит, для уравнения $z^3 = y^3 + x^3$ теорема Ферма полностью доказана. Это доказательство можно рассматривать как видоизмененное доказательство Эйлера. ⁽²⁾

26. Итак, согласно теореме Ферма, уравнение $Cz = By + Ax$ не имеет ни одного F_3 -решения

$$C = c^2, B = b^2, A = a^2; z = c, y = b, x = a, c > b > a > 0.$$

Но, спрашивается, как обстоит дело с $F_3^{(2)}$ -решениями (квази-ферматовые решения типа 3 и порядка 2), которые по своим свойствам могут считаться наилучшими приближениями к несуществующим F_3 -решениям? $F_3^{(2)}$ -решения характеризуются тем, что

$$C = c^2, B = b^2, A = a^2; z = c, y = b, x = a, c > b > a > 0, \\ b > a > 0.$$

Ответ на поставленный вопрос дает

Теорема VII. При $d = (c, c - 1)_2$ имеет место тождество

$$((2d + 1)c - d, (2d + 1)c - d - 1)_2 = d^2(4d + 3). \quad (33)$$

В самом деле, как показывают простые вычисления $d = 3c^2 - 3c + 1$; $(2d + 1)c - d = 6c^3 - 9c^2 + 6c - 1$ и $((2d + 1)c - d, (2d + 1)c - d - 1)_2 = 108c^6 - 324c^5 + 459c^4 - 378c^3 + 189c^2 - 54c + 7$. Но, с другой стороны, точно такое же выражение получается, если взять в правой части $d^2(4d + 3)$ $d = 3c^2 - 3c + 1$ и произвести соответствующие вычисления.

Этим теорема доказана.

Следствие из теоремы VII.

Тождество (32) дает бесчисленное множество $F_3^{(2)}$ -решений, соответственно значениям

$$c = 3, 4, 5,$$

Действительно, тождество (33) может быть переписано в виде

$$[(2d + 1)c - d]^3 = [(2d + 1)c - d - 1]^3 + d^2(4d + 3),$$

причем

$$(2d + 1)c - d > (2d + 1)c - d - 1 > d, \\ (2d + 1)c - d - 1 > 4d + 3 \text{ при } c \geq 3.$$

Так, например,

при $c = 3, d = 19$ и $98^3 = 97^3 + 19^2 \cdot 79$

при $c = 4, d = 37$ и $263^3 = 262^3 + 37^2 \cdot 151$ и т. д.

При всех $F_3^{(2)}$ -решениях, получаемых из тождества (33), разность значений $z - y = 1$: $98 - 97 = 1, 263 - 262 = 1$ и т. д.

Отметим, что помимо таких решений, где $z - y = 1$, существуют и $F_3^{(2)}$ -решения, где $z - y > 1$. Например,

$$32^3 = 29^3 + 21^2 \quad 19$$

$$70^3 = 67^3 + 57^2 \quad 13$$

$$39334^3 = 39309^3 + 3605^2 \quad 8923$$

$$3219^3 = 3050^3 + 1339^2 \quad 2779.$$

Согласно теореме Ферма, в целых числах объем куба не может равняться сумме объемов двух кубов, но, как показывают $F_3^{(2)}$ -решения, в целых числах объем куба может равняться сумме объемов куба и прямоугольного параллелепипеда, основанием которого служит квадрат, причем, идя слева направо, монотонно убывают как основания, так и высоты (симметричность решения).

ЛИТЕРАТУРА

1. Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, t. I, v. 3, 1906, стр. 28.
2. Bachmann, P. Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung, 1919, 2₁) стр. 13, 2₂) стр. 19—22.
3. Dirichlet, P. G. Lejeune, Dedekind, R. Vorlesungen über Zahlentheorie, IV Auflage, 1894, стр. 169—170.

DIOPHANTOSE ÜHE VÖRRANDI SÜMMEETRILISTEST LAHENDITEST

Prof., füüs.-mat. tead. dr. H. Jaakson

Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Käesolev töö koosneb neljast osast. Esimeses osas antakse sümmeetrilise lahendi mõiste ühenduses Diophantose ühe võrrandiga, selgitatakse välja tarvilikud ning piisavad tingimused selliste lahendite olemasoluks ja antakse menetlus nende lahendite konstrueerimiseks. Selliseid lahendeid on olemas lõpmata palju.

Töö teises osas käsitletakse spetsiaalseid sümmeetrilisi lahendeid, mis on seotud binaarse vormiga $(y, x)_{p-1}$. Siin kirjutatakse ette täiendavad tingimused nii võrrandi kordajaile kui ka otsitavaile lahendeile. Nii jõutakse F_n -lahendite ja $F_n^{(m)}$ -lahendite mõiste juurde [vastavalt — Fermat-lahendid tüüpi n ja quasi-Fermat-lahendid tüüpi n ja järku m]. F_2 -lahendeid on tõeliselt olemas, kuid F_n -lahendite ($n > 3$) olemasolu eitab tuntud Fermat' teoreem, mille üldist tõestust ei ole aga senini korda läinud püstitada.

Kui F_n -lahendeid ($n \geq 3$) ei peaks olema, siis tekib küsimus, kas ei ole olemas lahendeid, mis on võimalikult lähedased F_n -lahenditele. Sellistena esitatakse käesolevas töös $F_n^{(m)}$ -lahendid. Järku m kasvades 1-st kuni $n - 1$ lahendeile esitatavad tingimused muutuvad üha tugevamaiks, jäädes siiski nõrgemaks tingimustest F_n -lahendite tarvis. Selle tõttu võib loota, et vähemalt mõnede n ja m väärtuste puhul on tõeliselt olemas $F_n^{(m)}$ -lahendeid. Tõesti käesoleva töö neljandas osas on võidud näidata esialgsete orienteerivate uurimuste tulemusena lõpmata paljude $F_3^{(2)}$ -lahendite olemasolu.

Eelpool nimetatud Fermat' teoreem on omal ajal tõestatud juhu $n = 3$ tarvis Euleri poolt, kusjuures tema tõestus baseerub ruutvormil $y^2 + 3x^2$ ja selle omadustel. Teiselt poolt aga F_3 -lahendid on otseselt seotud ruutvormiga $(y, x)_2 = y^2 + yx + x^2$. Selle tõttu pakub huvi katse, nimetatud teoreemi tõestust ($n = 3$) juhul läbi

viia, toetudes ruutvormile $y^2 + yx + x^2$ ning selle omadustele. Töö kolmandas osas ongi seda ruutvormi sellelt seisukohalt uuritud ja mitmed tema omadused teoreemide kujul esitatud. Töö neljandas osas on antud Fermat' teoreemi tõestus $n = 3$ tarvis, toetudes eelpool leitud tulemustele. Niiviisi saadud tõestust võib lugeda Euleri tõestuse teisendiks.

EESTI NSV RANNIKUMEREDE HÜDROGRAAFILISE UURIMISE AJALOOST

(kuni 1917 aastani)

Geogr. tead. kand. E. Varep

Geograafia kateeder

Balti meri on juba kaugest minevikust alates etendanud tähtsat osa Euroopa rahvaste vahelises suhtlemises. Balti meri on iidne kaubatee, mille kaudu juba Vana-Vene maad suhtlesid Põhja- ja Lääne-Euroopa rahvastega. Kuid ühtlasi on Balti mere kaudu tungitud korduvalt kallale NSV Liidu rahvastele, mille tõttu see meri on kujunenud sajandeid kestnud võitluste areeniks.¹

Kuigi kõige varasemad teated Balti mere kohta on pärit juba antiikajast, algas ta täpsem geograafiline tundmaõppimine tunduvalt hiljem. Vanimad Balti mere kaardid on pärit XVI sajandist.² Need on koostatud praktilise meresõidu vajadusteks ning peamiselt meremeeste eneste poolt tehtud tähelepanekute alusel. Neil kaartidel puudus vajalik teaduslik alus ning nad olid isegi rannikute kontuuride osas väga ligikaudsed. Suuremat tähelepanu on neil pööratud meresõidus tähtsate orientiiride (neemed, saared jne.) esitamisele; ka on neile kantud mõned meresõidu praktikast tuntud kõige ohtlikumad karid ja madalad. Üksikuil kaartidel leidub ka juba teatud arv sügavusandmeid. Eriti tuntud olid hollandlase Lucas Waghenaeri kaardid, mis XVI sajandi lõpul ning XVII sajandi esimesel poolel leidsid laialdast kasutamist (joon. 1).

Olulist muutust ei toimunud Balti mere geograafilise uurimise alal ka XVII sajandil, mil Rootsi vallutas suurema osa Balti mere rannikuist ning kujunes domineerivaks riigiks ka merel. Sõjalised ja kaubanduslikud huvid, eriti aga meresõidu vajadused sundisid Rootsit siiski pöörama teatavat tähelepanu Balti mere kaartide

¹ Ш а с к о л ь с к и й, И. П. Маршрут торгового пути из Невы в Балтийское море в IX—XIII вв., Географический сборник III, Географическое Общество Союза ССР, М.—Л. 1954, lk. 146.

² A r b u s o w, L. Vorläufige Übersicht über die Kartographie Alt-Livlands bis 1595, Sitzungsberichte der Gesellschaft für Geschichte und Altertumskunde zu Riga, Riga 1935, lk. 64 jj.

koostamisele. Rootsi admiraliteedi väljaandel ilmus XVII sajandi teisel poolel, eriti aga sajandi lõpul rida merekaarte ning -atlasi, mida algul kasutati ka Peeter I poolt loodud Vene laevastikus. Needki kaardid, kuigi varasematega võrreldes märksa täielikumad, olid koostatud peamiselt praktilise meresõidu kogemuste alusel. Hüdrograafiliste uurimistööde kohta Eesti rannikuil ei ole XVII sajandist andmeid.

XVIII sajandi algul saavutas Venemaa Põhjasõjas juurdepääsu Balti merele. Peeter I initsiatiivil loodi Põhjasõja võitluste käigus Balti merel tugev laevastik ning Venemaa kujunes võimsaks Balti mere riigiks. Balti mere tähtsust Venemaale suurendas veelgi impeeriumi uue pealinna Peterburi rajamine selle mere rannikule. Balti meri muutus nii kaubanduse kui ka riigikaitse seisukohast Vene impeeriumi tähtsaimaks mereks, mille teaduslikule uurimisele pöörati erilist tähelepanu.³

I

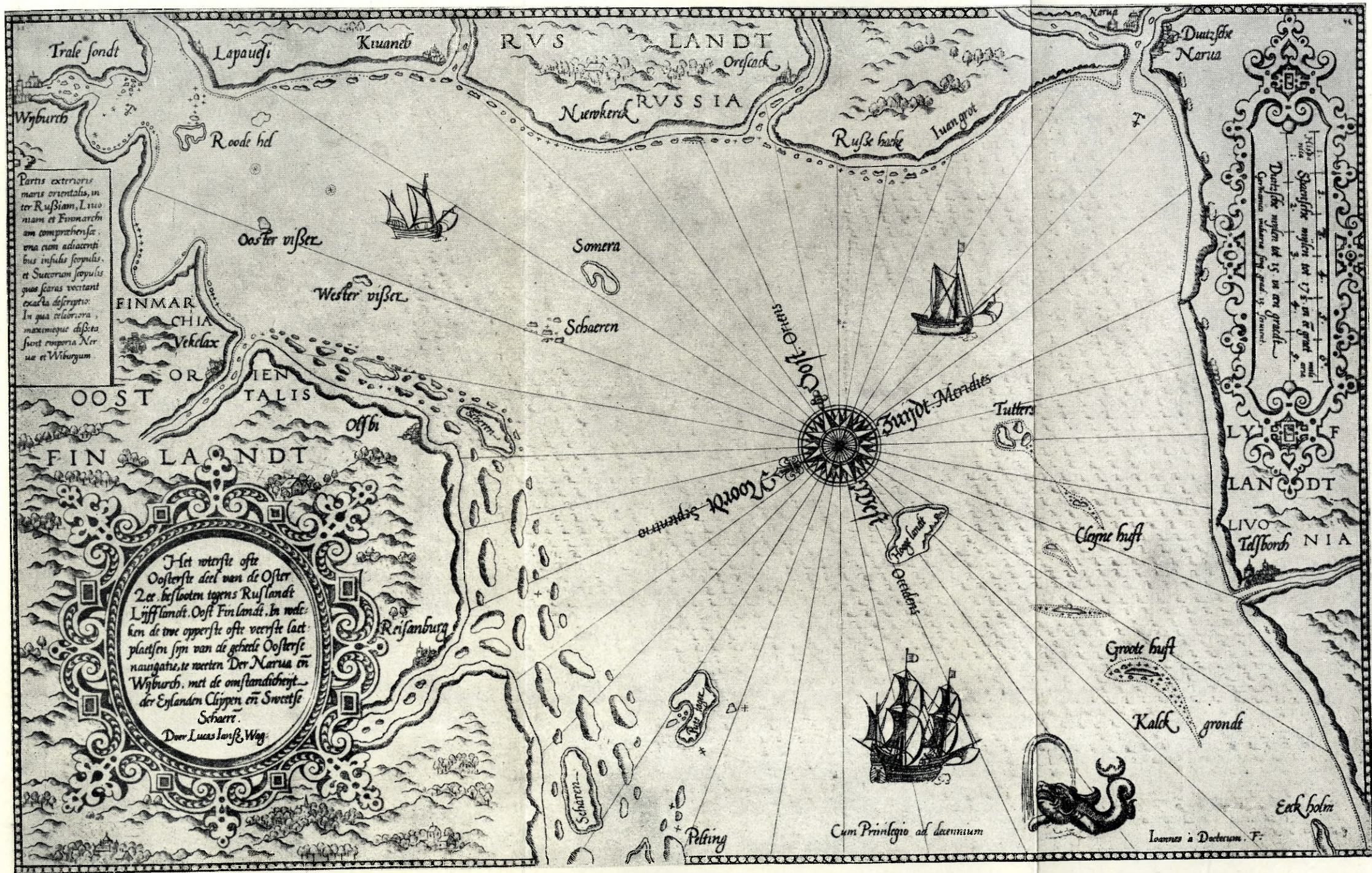
XVIII sajandi algul oli Venemaa, mille koosseisu kuulus Eesti 1710. aastast alates, sõjaliselt võimas ning majanduslikult ja kultuuriliselt kiiresti arenev riik. Peeter I, kelle nimega on seotud Venemaa tõus Euroopa suurriigiks, võitles, nagu teame, aastakümneid vaba juurdepääsu eest meredele. Sellega seoses pööras Peeter I erilist tähelepanu ka merede geograafilisele uurimisele. Peeter I käsul alustati samaaegselt Vene laevastiku loomisega Aasovi, Kaspia ja Musta mere ning Vaikse ookeani teaduslikku uurimist. Ta algatas ekspeditsioonide korraldamist, mille eesmärgiks oli kaubanduslike sidemete loomine Idamaadega. Peetri initsiatiivil pandi Venemaal alus geodeetilistele ja kartograafilistele töödele ning alustati kaartide ja geograafilise kirjanduse väljaandmist.⁴

Ka Eesti rannikumerede teadusliku uurimise alal kuulub initsiatiiv Peeter I-le. Balti merel algasid hüdrograafilised tööd 1710. aastal Soome lahe äärmise idaosa mõõdistamisega.⁵ Suurema ulatuse omandasid uurimistööd aga alles pärast Rootsi laevastiku hävitamist lahingus Hangö neeme juures 1714. a., mis kindlustas Vene merejõudude domineerimise Balti merel. 1715. a. alustati Peetri käsul Balti merel laialdasi hüdrograafilisi uurimisi, mis hõlmasid ka Eesti rannikualasid. Nende tööde teostamiseks saadeti Soome lahele kapten E. Lane ja navigaator A. I. Kožin, Riia lahele aga leitnandid M. Travin ja D. I. Mjasnoi. Tööde üldiseks juhatajaks oli 1702. a. Vene teenistusse astunud inglise kapten Edward Lane, kes töötas ise Soome lahe idaosa mõõdistamisel. Alam-tüürimees, hiljem leitnant A. I. Kožin töötas Soome lahe lääneosas, Suursaa-

³ Зубов, Н. Н. Отечественные мореплаватели — исследователи морей и океанов, Москва 1954, lk. 52.

⁴ Лебедев, Д. М. География в России петровского времени, М.—Л. 1950, lk. 3.

⁵ Краткий исторический очерк гидрографии русских морей, ч. III, Балтийское море с заливами, СПб, 1902, lk. 2.



Joon 1. Soome lahe kaart Lucas Waghenaeri mereatlase saksakeelsest väljaandest XVII saj. algusest. Originaal Tartu Riikliku Ülikooli Pearaamatukogus.



Joon 2. Osa A.I. Nagajevi poolt 1752. a. koostatud Soome lahe kaardist. Original Eesti NSV Teaduste Akadeemia F. R. Kreutzwaldi nimelises Kirjandusmuuseumis.

alusel ning oleksid varustatud pikkus- ja laiuskraadide võrguga ning andmetega sügavuste ja kompassi hälvete kohta.²¹

Selle ülesande täitmine usaldati kapten Sarõtševile, silmapaistvale meresõitjale, geograafile ja hüdrograafile. Gavril Andrejevits Sarõtšev (1763—1831)²² oli silma paistnud Vaikse ookeani põhjaossa korraldatud ekspeditsioonil. 1802. a. alates purjetas ta rea aastate vältel Balti merel, teostades siin koos oma abilistega astronoom E. I. Abrossimovi ja tüürimees A. I. Kolodkiniga Balti mere kaartide parandamise ja täiendamise eesmärgil astronoomilisi ja hüdrograafilisi töid. Ülendatud 1803. a. kontradmiraliks ning Admiraliteedi kolleegiumi liikmeks, avaldas ta 1808. a. oma uurimiste aruande²³, 1809. a. aga uue Balti mere atlase ning 1817 a. lootsiraamatu, mis varasemate Nagajevi töödega võrreldes olid oluliseks sammuks edasi. Ühtlasi avaldas ta rea juhendeid hüdrograafiliste ja astronoomiliste tööde teostamiseks meredel.

Pärast Sarõtševi tööde ilmumist saadeti Admiraliteedi poolt peaaegu igal aastal välja laevu Soome lahe üksikute osade täpsemaks mõõdistamiseks. Nende tööde raames teostati Eesti rannikuil mõõdistamisi 1821. a. Eru ja Käsmu lahes, 1822. a. Hara ja Pakri lahes ning Vormsi ümbruses, 1823. a. Kolga lahe ja Pärисpea rannikul, 1824. a. aga Ihasalu lahes ning Aegna, Prangli ja Aksi ümbruses.²⁴ Nimetatud mõõdistamiste andmeid kasutati uue Balti mere atlase koostamisel, mis ilmus kindral-major Spafarjevi toimeusel 1823. a.

XIX sajandi esimestel aastakümnetel teostasid K. I. Tenner, F W Struve ja F F Schubert Balti mere rannikul esimesi triangulatsioonilisi töid.²⁵ See tegi võimalikuks rajada ka Balti merel tehtavad hüdrograafilised tööd täpsele geodeetilisele alusele, mis senini puudus. Et ka senised sügavuste mõõtmised ei omanud vajalikku täpsust ning et üldse senised tööd ühtse juhtiva keskuse ja süstemaatilise kontrolli puudumise tõttu olid väga mitmesuguse väärtusega, sai üha selgemaks uue üldise Balti mere hüdrograafilise uurimise vajalikkus. Umbes samal ajal, XIX sajandi kahekümneandel aastatel, algas ka teiste Vene impeeriumi merede süstemaatiline uurimine. Kõnesolevad uurimistööd olid väga suure ulatusega, nõudsid suure hulga spetsiaalse väljaõppega hüdrograafide raken-damist ning ühtset keskust tööde juhtimiseks ja kontrollimiseks. Selleks asutati 1827 a. hüdrograafia peavalitsus ning moodustati

²¹ Краткий исторический очерк . . . , lk. 4.

²² Зубов, Н. Н. Гаврил Андреевич Сарычев. Русские мореплаватели, Москва 1953, lk. 125—136.

²³ Дневные записки плавания вице-адмирала Гаврилы Сарычева по Балтийскому морю и Финскому заливу в 1802, 1803, 1804 и 1805 годах, с астрономическими и геодезическими наблюдениями, принадлежащими к поправлению морских карт, СПб. 1808.

²⁴ Краткий исторический очерк . . . , lk. 8.

²⁵ Желнин, Г. А. Развитие основных астрономо-геодезических работ на территории Эстонской ССР в период 1811—1940 гг., Известия Академии Наук Эстонской ССР 1953, Г II, № 1, lk. 70—79.

spetsiaalne laevastiku tüürimeeste korpus, kelle peamiseks ülesandeks jäi hüdrograafiliste uurimiste teostamine.²⁶

1828. a. võeti vastu otsus Balti mere uueks täpseks hüdrograafiliseks uurimiseks rangelt teaduslikel alustel.²⁷ Tööde üldiseks juhiks määrati silmapaistev vene geodeet kindral-leitnant F F Schubert (1789—1865), kelle järgi kogu üritust hakati nimetama Schuberti ekspeditsiooniks. Tööde ulatuselt ja kestuselt kujunes see üheks suurimaks teaduslikuks ürituseks, mida on Eestis teostatud.

Uurimistööde esimestel aastatel teostati peamiselt triangulatsioonilisi töid. Neid asus juhtima leitnant V. V Wrangel (1797—1872), kes oli saanud vajaliku väljaõppe Struve poolt teostatud triangulatsioonilistel töödel. Wrangel töötas Balti mere hüdrograafilisel uurimisel kuni 1861. aastani, mil ta nimetati Tallinna sadama komandöriks. 1866. a. ülendati ta admiraliks ning valiti ühtlasi Teaduste Akadeemia korrespondeerivaks liikmeks. Wrangeli poolt teostatavate triangulatsioonitööde lähtekohaks oli Tallinna Lasnamäe ehitatud observatoorium. 1830. a. teostasid Wrangel ja Kislakovski Tallinna lahe jääl baasise mõõtmise 2252 sülla pikkuses. 1832. aastaks oli Soome lahe triangulatsioon Kroonlinnast Porkkalani ning Ristna tuletornini lõpetatud.²⁸ 1834. a. jätkas Wrangel triangulatsiooni Haapsalust Pärnuni, sidudes selle Struve poolt teostatud Liivimaa triangulatsiooniga. 1837.—1838. a. toimusid triangulatsioonilised tööd Hiiumaal, Muhus ja Saaremaal. 1839. a. lõpetati triangulatsiooniga seotud arvutused. Järgnevail aastail jätkusid triangulatsioonitööd peamiselt Botnia lahe rannikul.

Seoses Balti mere triangulatsiooniga teostati 1833. a. kindral-leitnant Schuberti juhtimisel kronomeetriline ekspeditsioon, millest võtsid osa kõik Balti mere riigid. Ekspeditsioon toimus aurikul „Gerkules”, millele oli paigutatud 56 kronomeetrit. Ekspeditsioonil määrati kronomeetriliselt 18 punkti geograafilised pikkused, Eesti alalt Tallinna, Ristna ja Sõrve kohta.²⁹

Paralleelselt triangulatsiooniga alustati juba uurimistööde esimestel aastatel ka sügavuste mõõtmist ning rannikute kaardistamist. Töid teostati algul piiratud ulatuses, peamiselt Kroonlinna ja Tallinna ümbruses. Nii teostati 1829.—1832. aastail leitnant Lazarevi ja teiste poolt Tallinna lahe ja Tallinna ümbruse madalate mõõdistamine, mida hiljem täiendati. Suuremas ulatuses alustati

²⁶ С а л и щ е в, К. А. Основы картоведения, часть историческая и картографические материалы, Москва 1948, lk. 196.

²⁷ М. Р (ейнке), Обзор съемки и промера Балтийского моря. Записки гидрографического департамента Морского Министерства, ч. II, СПб, 1844, стр. 233—302.

²⁸ Съёмка берегов Балтийского моря, производящаяся под начальством генерал-лейтенанта Шуберта. Записки Гидрографического Депо, ч. I, СПб, 1835, lk. 19.

²⁹ Хронометрическая экспедиция, произведенная в 1833 году под начальством генерал-лейтенанта Шуберта. Записки Гидрографического Депо, ч. III, СПб, 1836, lk. 1—258; ч. IV, СПб, 1836, lk. 1—182.

hüdrograafilisi töid 1833. a., s. o. pärast Soome lahe triangulatsiooni lõpetamist. Hüdrograafiliste tööde juhiks nimetati kaptenleitnant M. F Reinecke (surnud 1859. a.) kes varem oli töötanud Valge ja Barentsi mere uurimisel. Balti mere hüdrograafilist uurimist juhatas ta kuni 1852. aastani. Tõusnud viitse-admiraliks, oli ta hiljem Mereministeeriumi hüdrograafia departemangu direktoriks. M. F Reinecke juhtimisel moodustati 1833. a. spetsiaalne hüd-rograafide rühm, kelle käsutusse anti igal aastal teatav arv laevu ning muid vahendeid. Reinecke alustas töid Soome rannikul, hiljem kanti need üle Põhja-Eesti rannikuile. 1840. a. moodustati veel teine, nn. lõunapoolne hüd-rograafide rühm V V Wrangeli juhtimisel, kes alustas tööd Riia lähel. Mõlemad rühmad jagunesid salkadeks, keda juhatasid ohvitserid. Pikemat aega töötasid nendest Eesti rannikul leitnandid Andrejev, Grivtsov, Ivanov, Kolmakov, Leontjev, Larionov jt.

Eesti rannikul toimusid uurimistööd peamiselt neljakümnendail ja viiekümnendail aastail. Töödest võttis osa väga suur arv uurijaid. Üksikuil aastail ulatus hüd-rograafilistele töödele rakendatud isikute arv 600-ni ja isegi üle selle. 1851. aastal näiteks töötasid põhjapoolses rühmas 28 ohvitseri ja 299 sõdurit, lõunapoolses rühmas 27 ohvitseri ja 285 sõdurit. Kui arvata kaasa ka uurimistöödele rakendatud laevade meeskonnad, ulatus nimetatud aastal uurimistöödest osavõtjate arv üle 1000 inimese.³⁰

Alates 1833. aastast, mil algasid ulatuslikumad hüd-rograafilised tööd, anti uurijate käsutusse rida laevu, milledest olgu nimetatud kuunarid „Sneg“, „Vihr“, „Dožd“ „Raduga“, „Grad“ jmt., brikid „Diomid“, „Nestor“ „Filoktet“, „Paris“, „Priam“ ja „Ajaks“, aurikud „Bõstrõi“ ja „Pospešnõi“, jahtlaev „Goluka“, transpordilaevad „Volhov“ „Petšora“, „Mologa“ „Pinega“ jne. Laevu kasutati uurimiserühmade kohaletransportimiseks ning varustamiseks, kuid ka mõõdistamistöödeks ulgumerel. Ranna lähedal teostati mõõdistamist spetsiaalsete mõõtepaatide abil, mida oli ekspedit-sioonil arvukalt kasutada.

Uurimistööd, mis kestsid aastakümneid ning mida tuli teostada sageli väga rasketes tingimustes, nõudsid uurijailt suuri pingutusi ning olid seotud mitmesuguste ohtudega. Nii hukkus 1847. a. juuli algul Vaindloo saare juures tihedas udus purjelaev „Nestor“, mis oli teel Tallinnast Soome skäärides töötava uurimis-salga juurde.³¹

XIX sajandi viiekümnendaiks aastaiks viidi enamik töid Balti merel lõpule ning 1853. a. lõpetas Schuberti hüd-rograafiline ekspedit-sioon tegevuse. Eesti rannikul jätkusid uurimistööd aga ka veel järgnevail aastail Wrangeli juhtimisel, peamiselt Riia lähel kuni 1859. aastani. Pärast seda jätkusid tööd peamiselt Balti mere teistes osades.

³⁰ Краткий исторический очерк . . . , lk. 28—29.

³¹ Samas, lk. 23.

Kõnesolevate uurimistööde tulemused olid väga suured. Uurimistööde käigus teostati rannikute kaardistamine ning rannikumere hüdrograafilise uurimine. Peale sügavuste mõõtmise teostati ka merepõhja ja hoovuste uurimist ning magnetomeetrilisi vaatlusi. Uurimistööde tulemuste põhjal koostati uued merekaardid, mis olid kasutusel kuni Esimese maailmasõjani, osalt isegi veel pärast seda.

IV

XIX sajandi keskel teostatud ulatuslike uurimistööde järel oli Balti meri kahtlemata hüdrograafiliselt üheks kõige paremini uuritud Vene impeeriumi mereks. Seetõttu suunati XIX sajandi lõpul ning XX sajandi algul Balti mere uurimisele suhteliselt vähe jõude. Peamine tähelepanu oli sel perioodil pööratud Venemaa teiste merede hüdrograafilisele uurimisele. Siiski nõudis meresõidu areng, eriti üleminek purjelaevadelt aurikute kasutamisele ning laevade mõõtmete järkjärguline suurenemine ka Balti merel hüdrograafiliste tööde jätkamist. Uurimistööde jätkamist dikteerisid riigikaitse vajadused eriti sajandi lõpust alates, mil imperialistlike suurriikide vahekorrad omandasid äärmise teravuse.

XIX sajandi viimastel aastakümnetel ja XX sajandi algul teostati Eesti rannikuil detailset merede mõõdistamist üksikutes, peamiselt strateegiliselt tähtsates piirkondades, nagu Irbeni väinas (1882—1886), Kihnu väinas (1883—1893), Soela väinas (1883—1898), Väinameres (1886—1888), Põhja-Eesti, Saaremaa ja Hiiumaa sügavamates lahtedes ja veel mõningates teistes paikades. Hüdrograafiliste tööde juhiks kõnesoleval perioodil oli silmapaiste teadlane-hüdrograaf, 1. järgu kapten E. V Berjozin. Võrreldes varasemate töödega on nende mõõdistamiste kvaliteet tunduvalt kõrgem, kuid need suudeti teostada suhteliselt piiratud alal.

1908. a. asuti teostama Balti mere uut süstemaatilist mõõdistamist mõõdus 1 : 16800³² Tööde programmi kohaselt tulnuks teostada rannikute uus triangulatsioon ning mõõdistamine mensulil 5 miili kauguseni sisemaale, merel aga täpne sügavuste loodimine, merepõhja, hoovuste, magnetiliste hälvete jne. uurimine. Tööd katkestas I imperialistlik maailmasõda. Eesti rannikuil suudeti nende tööde raames teostada detailset mõõdistamist ainult vähestes kohtades üsna piiratud ulatuses (1908. a. Haapsalu lahes, 1913. a. Ariste lahes)

* *
*

Vene meremeeste ja teadlaste hüdrograafilised uurimistööd Eesti NSV rannikuil enam kui kahe sajandi vältel on rikastanud teadust paljude tähtsate andmetega Balti mere kohta. Selletõttu on neil uurimistöödel Balti mere geograafilise uurimise ajaloos jäädav

³² С а л и щ е в, К. А. viidatud teos, lk. 198.

koht. Need tööd on teostatud oma aja kohta väga suure täpsusega ning nende tulemused on olnud suure tähtsusega laevasõidu tingimuste parandamisel Balti merel.

Paljud Eesti NSV rannikumerede uurimisest osavõtnud vene meremehed ja teadlased on jäädvustanud oma nimed Eesti ranniku merekaartidel nende poolt avastatud madalate ja karide nimedes (joon. 3). Leidub ka üksikuid nimesid, mis on antud siin töötanud



Joon. 3. Vene kohanimed Eesti NSV rannikumeredel.

uurimislaevade järgi. Vanemate, enamasti saksa ja rootsi päritoluga kohanimedest kõrval moodustavad need meie rannikumerega seotud kohanimedest üsna olulise osa. Ühtlasi on need jäädavaks mälestusmärgiks vapratele meremeestele ja teadlastele, kellel Eesti NSV geograafilise uurimise ajaloos on suured teened.

L I S A

Vene kohanimed Eesti NSV rannikumeredel

(Koha asend on näidatud joon. 3)

A f a n a s j e v i m a d a l (банка Афанасьева) — Riia lahes Varbla rannikul (40). Nimetatud staabikapten Afanasjevi auks, kes oli XIX sajandi teisel poolel tegev Balti mere hüdrograafilisel uurimisel.

A n d r e j e v i m a d a l (банка Андреева) — Balti meres Eesti NSV looderannikul (16). Vt. järgnev kohanimi.

Andrejevi madal (банка Андреева) — Balti meres Hiiumaa rannikul (22) Nimetatud XIX sajandi viiekümnendais aastais Eesti rannikuil töötanud hüdrograafide salga ülema Aleksandr Petrovitš Andrejevi auks (hiljem kindral-major, silmapaistev hüdrograaf, Valge mere, Laadoga ja Onega järve uurija).

Aleksandri madal (банка Александра) — Riia lahes Kihnu rannikul (42) Nime päritolu vajab selgitamist.

Barabanovi madal (банка Барабанова) — Soome lahes Mahu rannikul (1). Nimi (varem Baraban) esineb juba Nagajevi merekaartidel.

Berjozini madal (банка Берёзина) — Balti meres Irbeni väina lähistel (36) Nimetatud silmapaistva õpetlase-hüdrograafi, esimese järgu kapteni E. V Berjozini auks, kes oli XIX sajandi 70-ndail ja 80-ndail aastail Balti merel tehtavate hüdrograafiliste tööde juhiks.

Bõstrõi madal (банка Быстрый) — Riia lahes Kõbli rannikul (43). Nimetatud uurimislaua, auriku „Bõstrõi” järgi, mis teostas kõnesolevas piirkonnas uurimisi 1857 ja 1858. aastail.

Diomedese (Diomidi) madal (банка Диомид) — Soome lahes Mahu rannikul (2) Nimetatud uurimislaua, briki „Diomid” järgi, mis töötas siin 1846. ja järgnevail aastail.

Durakini madal (банка Дуракина) — Balti meres Hiiumaa rannikul (26) Nimetatud alamleitnant Durakini auks, kes XIX sajandi 60-ndail aastail töötas Balti merel hüdrograafilistel töödel.

Glotovi madal (банка Глотова) — Balti meres, Hiiumaast loodes (20). Nimetatud leitnant Glotovi (hiljem kapten) auks, kes teostas siin 1853. a. aurikul „Bõstrõi” hüdrograafilisi uurimisi.

Grivtsovi madal (банка Гривцова) — Balti meres Hiiumaa rannikul (28). Nimetatud lipniku Grivtsovi (alates 1851. a. nooremleitnant) auks, kes oli XIX sajandi 40-ndail ja 50-ndail aastail Eesti rannikuil töötanud hüdrograafide salga ülemaks.

Hudjakovi kivi (камень Худякова) — Soome lahes Tallinna kivi läheduses (8). Nimetatud nähtavasti Sarõtševi poolt ta ekspeditsioonidest osavõtja geodeet Hudjakovi auks.

Ivanovski madal (банка Ивановского) — Balti meres Irbeni väina lähistel (37). Nimetatud hüdrograafide salga ülema leitnant Ivanovski (hiljem polkovnik) auks, kes teostas siin 1882.—1885. a. hüdrograafilisi uurimisi. Eestikeelseil kaartidel ekslikult ka Ivanovi madal.

Karprovi madal (банка Карпова) — Soome lahes Viimsi poolsaare rannikul (7). Nimi esineb juba Nagajevil. Eestikeelseil kaartidel ka Krabi madal.

Kolmakovi madal (банка Колмакова) — Balti meres ENSV looderannikul (14) Nimetatud lipnik Kolmakovi auks, kes teostas 1850.—1851. a. topograafilisi töid Naapsalu ümbruses ja Hiiumaal.

Kompassi madal (банка Компас) — Väinameres Muhu

rannikul (39). Nimetatud XIX sajandi keskel Balti mere hüdrograafilistel uurimistöödel rakendatud uurimislaeva, kuunari „Kompass” järgi.

Koroljovi madal (банка Королёва) — Balti meres Hiiumaa rannikul (24) Nime päritolu vajab selgitamist.

Kuznetsovi madal (банка Кузнецова) — Balti meres Hiiumaa rannikul (23) Nimetatud kapten-leitnant Kuznetsovi auks, kes oli siin 1849. a. töötanud uurimislaeva „Strelna” komandöriks.

Larini madal (банка Ларина) — Riia lahes Varbla rannikul (41) Nime päritolu vajab selgitamist.

Leontjevi madal (банка Леонтьева) — Tallinna lahes (11). Nimetatud lipnik Leontjevi auks, kes töötas XIX sajandi keskel Balti merel hüdrograafilistel töödel.

Maksimovi madal (банка Максимова) — Balti meres Hiiumaa rannikul (25). Nimetatud lipnik Maksimovi auks, kes oli ühe XIX sajandi keskel Balti merel töötanud hüdrograafide salga ülemaks.

Nagajevi madal (банка Нагаева) — Soome lahes Vergi rannikul (6). Vt. järgnev kohanimi.

Nagajevi madal (банка Нагаева) — Balti meres Hiiumaa rannikul (21) Nimetatud admiral Nagajevi auks.

Neupokojevi madalad (банка Неупокоева) — 3 madalat Balti meres Hiiumaa rannikul (27, 29, 30) Vt. järgnev kohanimi.

Neupokojevi madal (банка Неупокоева) — Balti meres Hiiumaa rannikul (31) Nimetatud XIX sajandi keskel siin töötanud hüdrograafi, lipnik Neupokojevi auks.

Petrovi madal (банка Петрова) — Riia lahes Ikla rannikul (44). Nime päritolu vajab selgitamist.

Rjabinini madal (банка Рябинина) — Balti meres Saaremaa läänerannikul (32). Nimi on antud admiral Nagajevi poolt ühe oma abilise M. I. Rjabinini auks, kes 1748.—1751. a. teostas Balti merel hüdrograafilisi uurimistöid. Kohalike elanike poolt kasutatav nimetus — Rabina kalju — on pääsenud ka kirjandusse.

Rabotniku madal (банка Работник) — Balti meres Irbeni väina lähistel (35). Nimetatud uurimislaeva, auriku „Rabotnik” järgi, mis teostas siin 1882.—1886. a. hüdrograafilisi uurimisi.

Rodionovi madal (банка Родионова) — Soome lahes Mahu rannikul (3) Nimetatud uurimislaeva „Sneg” komandöri, kapten-leitnant Rodionovi auks.

Sarõtševi madal (банка Сарычева) — Balti meres Saaremaa läänerannikul (34). Nimetatud silmapaistva teadlase-geograafi admiral G. A. Sarõtševi auks.

Savinovi madal (банка Савинова) — Balti meres Eesti NSV looderannikul (15).

Serbini madal (банка Сербина) — Balti meres Hiiumaast põhja pool (18) Nimetatud Nagajevi ühe abilise, leitnant Nikita

Serbini auks, kes 1745.—1753. a. laevadel „Sturman” ja „Lotsman” teostas Balti merel hüdrograafilisi uurimisi.

S g i b n e v i m a d a l (банка Сгибнева) — Balti meres Eesti NSV looderannikul (12). Vt. järgnev kohanimi.

S g i b n e v i m a d a l (банка Сгибнева) — Balti meres Eesti NSV looderannikul (17). Nime päritolu vajab selgitamist.

S i h i m a d a l (Створная банка) — Väinameres Kumari saare piirkonnas (38).

S n j e g i m a d a l (банка Снег) — Soome lahes Vainupää ranniku kohal (4) Nimetatud uurimislaeva, kuunari „Sneg” järgi, mis teostas siin uurimisi 1846. ja järgnevail aastail.

U u s m a d a l (Новая мель) — Soome lahes Naissaarest kirdes (9). Nimi esineb juba Nagajevi kaartidel. Uuematel kaartidel esineb kohanimi ka eestistatud kujul (банка Усмадал)

T š e r n j a j e v i m a d a l (банка Черняева) — Tallinna lahes (10). Eestikeelsetes lootsiraamatutes Musta madalik.

T š e r n o v i m a d a l (банка Чернёва) — Balti meres Eesti NSV looderannikul (13). Vt. järgnev kohanimi.

T š e r n o v i m a d a l (банка Чернёва) — Balti meres Saaremaa läänerannikul (33) Nimi on antud Nagajevi poolt ühe oma abilise Tšernovi auks. Kohalik nimetus Mustpank on tuletatud eelmisest.

T u i m a d a l (банка Голубка) — Soome lahes Vergi rannikul (5) Nimi on antud siin 1846. ja järgnevail aastail uurimisi teostanud jahtlaeva „Golubka” järgi. Uuematel kaartidel esineb kohanimi ka eestikeelses tõlkes (банка Туймадалик)

V i n k o v i m a d a l (банка Винкова) — Balti meres Hiiumaa ranniku kohal (19) Nimi on antud Nagajevi poolt leitnant Vassili Vinkovi (hiljem esimese järgu kapten) auks, kes XVIII sajandi keskpaiku teostas siin hüdrograafilisi uurimisi.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК ГИДРОГРАФИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ БАЛТИЙСКОГО МОРЯ НА БЕРЕГАХ ЭСТОНСКОЙ ССР

(до 1917 года)

Канд. геол. наук Э. Вареп

Кафедра географии

Резюме

Гидрографические исследования Балтийского моря на берегах Эстонии были начаты по инициативе Петра I вскоре после присоединения территории Эстонии к Русской империи. По приказу Петра I на берегах Эстонии в 1715 году работали питомцы Московской школы математических навигацких наук — офицеры морского флота А. И. Кожин (на Финском заливе), М. Травин и Д. И. Мясной (на Рижском заливе). В 1717—1718 гг. на берегах Эстонии работали К. Верден и первый русский гидрограф Ф. И. Соймонов. В 1719 году приступили к общей съемке Финского залива под руководством И. Любераса, который в результате своих работ 1726 года предъявил адмиралтейской коллегии общую карту Финского залива и ряд специальных карт, в том числе и карты побережья северной Эстонии.

После смерти Петра I исследование Балтийского моря продолжалось под руководством Ф. И. Соймонова, но самым важным достижением по научному изучению Балтийского моря в XVIII веке были исследовательские работы под руководством А. И. Нагаева, начатые в 1746 г. На берегах Эстонии работали Лебядников, Плещеев, Рябинин, Сербин, Чернов, Винков и другие сотрудники Нагаева, осуществившие здесь весьма обширные и — для того времени — точные гидрографические исследования. Морские карты берегов Эстонии, составленные Нагаевым, находили применение в мореходстве свыше 60 лет (до начала XIX века).

После окончания исследовательских работ Нагаева во второй половине XVIII века на побережьях Эстонии производились только небольшие дополнительные исследования в некоторых от-

дельных местах. Но, в результате развития мореходства и применения точных инструментов, карты Нагаева в начале XIX века уже не соответствовали требованиям. В 1802 году Адмиралтейская коллегия решила приступить к составлению новых карт Балтийского моря. Выполнение этого задания было доверено Г. А. Сарычеву. В 1802—1807 гг. он работал с помощниками на Финском заливе и дополнил морские карты побережья Эстонии.

В 1828 году было принято решение о систематическом гидрографическом исследовании Балтийского моря. По объему и длительности работ это научное исследование принадлежало к числу наиболее обширных в Эстонии. Руководителями исследовательских работ были Ф. Ф. Шуберт, В. В. Врангель и М. Ф. Рейнеке. Вначале производились главным образом триангуляционные работы под руководством В. В. Врангеля, законченные в Эстонии в 1839 году. Обширные гидрологические работы начались в 1833 году под руководством М. Ф. Рейнеке. Начиная с 1840 года была дополнительно составлена вторая, южная группа гидрографов под руководством В. В. Врангеля. Количество людей на гидрографических и топографических работах в отдельные годы (напр. в 1851 г.) превышало 600, а вместе с экипажем судна участников экспедиции было свыше 1000 человек. Работы в основном закончились к 1853 году, когда экспедиция Шуберта была упразднена. После этого гидрографические работы продолжались под руководством Врангеля лишь в незначительном количестве в пределах Рижского залива и велись до 1859 года.

В конце XIX и в начале XX века главное внимание было уделено исследованию других морей Русской империи. Но развитие мореходства потребовало продолжения исследования Балтийского моря. В указанный период детальное исследование морей проводилось на берегах Эстонии в стратегически важных проливах и заливах, но в ограниченной мере. Начатые в 1908 году новые детальные съемки Балтийского моря были вскоре прерваны начавшейся первой империалистической войной.

Имена многих мореплавателей и ученых, принимавших участие в исследовании морей Эстонской ССР, запечатлены на морских картах берегов Эстонии. Встречаются и некоторые имена, данные в честь работавших здесь исследовательских судов. Русские имена на морских картах берегов Эстонии являются вечной памятью храбрым исследователям, имеющим большие заслуги в области географического исследования нашей республики.

СТРАТИГРАФИЯ КУКРУСЕСКОГО ГОРИЗОНТА (С_{II}) ЭСТОНСКОЙ ССР

Канд. геол.-минерал. наук А. Рымусокс

Кафедра геологии

Введение

Важнейшим полезным ископаемым Эстонской ССР является, несомненно, горючий сланец, добывание которого началось в Эстонии во втором десятилетии настоящего века и продолжается с тех пор в возрастающих размерах. Одной из предпосылок для дальнейшего расширения добычи горючего сланца является целесообразное проведение обширных геолого-разведочных работ. Но успехи последних зависят, по существу, от того, насколько хорошо известна стратиграфия слоев, содержащих горючий сланец. Из нижеследующего, однако, видно, что существующие схемы стратиграфического расчленения кукрусеского горизонта имеют локальный характер. Они составлены главным образом по разрезам, расположенным недалеко друг от друга в промышленном районе сланцевого бассейна в восточной части Эстонии, и далеко не удовлетворяют современных требований геологической науки и практики.

В настоящей статье автором предложена новая схема стратиграфического расчленения кукрусеского горизонта, которая является результатом специальных биостратиграфических исследований с 1948 по 1954 года.

Использованы все богатые фаунистические материалы, имеющиеся в музеях Эстонской ССР, в особенности коллекции Геологического музея Академии Наук Эстонской ССР, собранные многими геологами и самим автором.

Во время исследований автору помогали ценными советами уважаемые учителя автора, покойный проф. А. Луха, проф. К. Орвику и доц. Э. Мельс. Автор многим обязан кандидатам С. С. Бауков, Э. Юргенсон, А. Ораспыльд, Х. Палмре и Л. Сарв, а также геологам Д. Кальо и Я. Кельпман. При составлении работы автору оказывал услуги лабор. Э. Ууз.

Автор считает своим долгом выразить всем названным лицам свою сердечную благодарность.

Исторический обзор

Кукрусеский горизонт (C_{II}) =

- = Rother Brandschiefer (Ia), частично; Ф. Шмидт 1858.
- = Kuckersche Schicht (Brandschiefer) (C_2), частично; Ф. Шмидт 1881.
- = Kuckers Schale (Brandschiefer) (C_2), частично; Ф. Шмидт 1882.
- = Kuckers Formation (C_2), частично; П. Раймонд 1916.
- = Kuckers Stage (C_2), частично; Х. Беккер 1921.
- = Kukruse lade (C_2) и нижние слои йыхвиского горизонта; Х. Беккер 1924.
- = Kukruse Stufe ($C_2 - C_3$) и нижние слои йыхвиского горизонта; А. Эпик 1927.
- = Kukruse Stufe ($C_2 - C_3$) частично и нижние слои йыхвиского горизонта; А. Эпик 1930.
- = Kukruse Stufe (C_{II}) и верхние пюссиские слои (т. е. нижние промпласты А, В, С); В. Яануссон 1945.

Кукрусеский горизонт среднего ордовика, как самостоятельная стратиграфическая единица, был обоснован Ф. Шмидтом в 1858 г. Он тщательно рассматривает распространение и литологию горючих сланцев и содержащуюся в них фауну. Ф. Шмидт указывает следующие обнажения слоев горючего сланца: Ухтна, Коогу, Ванамыйза, Адина, Сала, Савала, Уникаля, Хирмусе и Кохтла.

Несколькими годами позднее, в 1881 г., Ф. Шмидт дает уже более детальную сводку по стратиграфии известняковой толщи со слоями горючих сланцев, называя этот комплекс пород кукрусеским горизонтом (C_2) (1881, стр. 28). В этой работе Ф. Шмидт, уточняя распространение горючих сланцев в Эстонии, отмечает, что самые мощные слои горючего сланца распространены между Раквере и Йыхви. Кроме ранее известных местонахождений горючих сланцев Ф. Шмидт называет еще Пальдиски, Ласнамяги, Ягала и Кукрuse. Из приведенных данных видно, что Ф. Шмидту был известен не полный разрез кукрусеского горизонта, но лишь отдельные его части (рис. 1). Фауна кукрусеского горизонта, по Ф. Шмидту, тесно связана с фауной эхиносферитового известняка (C_I) и охарактеризована им в виде списка, содержащего 56 видов.

В следующем 1882 году Ф. Шмидт дополняет сведения о кукрусеском горизонте указанием на его мощность, измеряющуюся в пределах 9—15 м, и списком характерных для C_2 видов (1882, стр. 521).

Р. Басслер (1911) приводит список фауны ордовика Прибалтики, в котором для кукрусеского горизонта указывается 94 вида.

П. Раймонд (1916) повторяет данные Ф. Шмидта о горизонте Кукрусе, почти не добавляя к ним новых данных.

В сводке Н. Ф. Погребова (1920) даются впервые детальные описания всего разреза кукрусского горизонта, довольно точные геологические карты северной части Эстонии (составлены П. Ф. Крутиковым и В. М. Козловским) и подсчеты запасов горючего сланца. Н. Ф. Погребов, П. Ф. Крутиков и М. Д. Залеский на заседании Академии наук 17 ноября 1916 г. в Петербурге предложили для горючего сланца название — «кукерсит».

Много новых данных о стратиграфии кукрусского горизонта

Ф Шмидт 1881	Х Беккер 1924	А Эпик 1927-1930	В. Януссон 1945	А Рывимусок 1954
С ₃	Иыхвиский горизонт D ₁	Иыхвиский горизонт D ₁	Игабереский горизонт C ₃	Игабереский горизонт C _{III}
С ₂	Подгоризонт с <i>Mesogartius</i> - <i>Climacogartius</i> (слои XVII-XXIII)	С _{3β}	Верхний подгоризонт	Хумалаский подгоризонт C _{IIβ}
С ₂		С _{3α}		
С ₂	Подгоризонт с брахиоподами (слои IX-XVI)	С _{2β}	Кохтлаский подгоризонт	Кохтлаский подгоризонт C _{IIα}
С ₂	*)	С _{2α}	Ухакусский горизонт C _{1c}	Ухакусский горизонт C _{Ic}
С ₂	Таллинский горизонт C _{1b}	С _{1δ} (<i>Caryocystites</i> - зона)		

Рис. 1. Сопоставление стратиграфических схем кукрусского горизонта. Штриховкой показаны слои, которые не были известны Ф. Шмидту. Звездочкой отмечен подгоризонт с *Coelosphaeridium* (слой VIII), а двумя звездочками подгоризонт с мшанками (слои I—VII).

дает Х. Беккер (1921). Он оценивает мощность кукрусского горизонта в западной части Эстонии в 9 м, в восточной 11—17 м; в работе Х. Беккера приводится разрез сланцевой пачки из горных выработок в Кохтла-Ярве с данными о фауне, собранной по-слоино. Х. Беккером дается впервые корреляция разрезов кукрусского горизонта между западной и восточной частями Эстонии. Х. Беккером дан и более полный список фауны кукрусского го-

ризонта, в котором, однако, имеется ряд неправильных определений.

Х. Винклер (1922) добавляет к данным Ф Шмидта и Н. Ф. Погребова мало нового материала. Список фауны кукурусеского горизонта составлен им по литературным данным и содержит много ошибок.

В 1923 году Х. Беккер приводит предварительные данные о результатах новых исследований по стратиграфии кукурусеского горизонта, которые в более полном виде изложены им в его следующей работе (1924). В этой последней работе Х. Беккер дает кукурусескому горизонту впервые определенное стратиграфическое разграничение: нижней границей его является подошва нижнего слоя промышленной пачки горючего сланца (слой I или A), а верхней — самый верхний ясно выраженный слой горючего сланца. Мощность кукурусеского горизонта, по Х. Беккеру, колеблется в пределах 8,4—16,87 м. Им дается и первое подразделение горизонта на четыре подгоризонта (снизу вверх): подгоризонт с мшанками (слои I—VII), подгоризонт с *Coelosphaeridium* (слой VIII), подгоризонт с брахиоподами (слои IX—XVI) и подгоризонт с *Mesograptus-Climacograptus* (слои XVII—XXIII), (см. рис. 1). К сожалению, Х. Беккер был мало знаком с обнажениями кукурусеского горизонта в западной части Эстонии и основывал свою стратиграфическую схему лишь на данных и материалах, полученных в промышленной части бассейна горючих сланцев. Следует также отметить, что в этой работе Х. Беккер полностью игнорирует самостоятельность идавереского горизонта (C_3) Ф. Шмидта и причисляет соответствующие слои к йыхвискому горизонту (D_1).

А. Эпик (1925) впервые обратил внимание на разные фации кукурусеского горизонта в полосе его выхода.

В своих более поздних работах (1927—1930) А. Эпик совсем необоснованно перенес название «идавереский горизонт» на верхнюю часть кукурусеского горизонта (слои XVII—XXIII в схеме Х. Беккера) Этим самым А. Эпик не игнорировал полностью идавереский горизонт, как Х. Беккер, но высказался еще менее удачно, называя идаверескими слоями слои, которые по фауне и литологическому составу фактически относятся к кукурусескому горизонту (рис. 1).

Границы и подразделения кукурусеского горизонта в схемах А. Эпика и Х. Беккера не совпадают полностью; главное отличие заключается в том, что по А. Эпику нижней границей считается первый в разрезе среднего ордовика маломощный прослой горючего сланца, а не подошва промышленной пачки горючего сланца (слой I по Х. Беккеру) (срв. также К. Орвику 1927, 1929). Свое подразделение кукурусеского горизонта ($C_{2a} - \beta$, $C_{3a} - \beta$) А. Эпик основывает на брахиоподах, изученных им самим; но, как показывают исследования автора настоящей статьи, это подразделение является фаунистически мало обоснованным.

Фауна кукрусеского горизонта, по А. Эпику, включает более 300 видов.

Х. С к у п и н (1928) дает более уточненный список фауны кукрусеского горизонта.

К. О р в и к у (1940) рассматривает более подробно вопрос о границе горизонтов ухаку и кукресе и впервые обращает внимание на эту границу в западной части Эстонии, исходя из литологических исследований.

В. Я н а н у с с о н (1945) причисляет нижнюю часть кукрусеского горизонта (пласты А, В и С промышленной пачки — верхняя часть S_{2a} по А. Эпику) к ухакусскому горизонту (C_{1c}), однако не обосновывает это фаунистически в достаточной мере. Кукрусеский горизонт подразделяется им на два подгоризонта: нижний, кохтлаский ($S_{2\beta}$ по А. Эпику) и верхний (S_3 по А. Эпику). Но В. Януссон ошибочно сопоставляет $S_{3\beta}$ А. Эпики, а тем самым и верхнюю часть кукрусеского горизонта Х. Беккера, с идавереским горизонтом Ф. Шмидта (как уже было сказано, $S_{3\beta}$ в действительности соответствует верхней части кукрусеского горизонта). Все же В. Януссон исправляет ошибку Х. Беккера и А. Эпики, восстанавливая самостоятельность идавереского горизонта (рис. 1). Нижняя граница кукрусеского горизонта в восточной части Эстонии по В. Януссону совпадает с нижней границей подгоризонта $S_{2\beta}$ по А. Эпику. В западной части Эстонии нижняя граница кукрусеского горизонта В. Януссоном точно не установлена. Верхней границей горизонта В. Януссон считает две четко выраженные сближенные поверхности размыва в кровле мергелистых известняков с прослойками горячего сланца. Верхняя граница горизонта вполне обоснована, так как она четко отражает момент значительного изменения в составе фауны, а также в литологическом составе слоев; выше нее слои горячего сланца в разрезе практически отсутствуют (см. стр. 112).

Проблема границы между горизонтами кукресе и идавере, рассмотрена еще Р. М я н н и л ь, который приводит более подробные данные о изменении фауны на этой границе.

В. В. Л е в ы к и н (1947) дает обзор стратиграфии кукрусеского горизонта по литературным данным, не сообщая, по существу, ничего нового.

Довольно длинные списки фауны приводит Т. Н. А л и х о в а (1953), которая делает также попытку сопоставить разрезы кукрусеского горизонта Эстонии и Ленинградской области. Стратиграфическое расчленение Т. Н. Алиховой ничем по существу не отличается от схем прежних авторов.

Кукрусеский горизонт кратко рассматривается еще Б. М. К е л л е р о м (1954, стр. 28) и автором настоящей работы (А. Р ы ы м у с о к с, 1956, стр. 24).

Наиболее поздний список фауны кукрусеского горизонта приведен в работе Д. К а л ь о и др. (1956).

Наконец, литология горючих сланцев кукрусеского горизонта и условия сланценакопления рассматриваются в работе С. С. Баукова (1956).

Нижняя граница

Вопрос о нижней границе кукрусеского горизонта до самого последнего времени был одним из самых трудных для исследователей ордовика Эстонии, о чем можно судить по тому факту, что в разное время было предложено три разных варианта ее положения. При этом следует указать, что все эти варианты базировались на разрезах в восточной части Эстонии (в границах промышленного распределения горючих сланцев). Коррелировать эти разрезы с разрезами в других районах Эстонии было невозможно, поскольку отсутствовали данные о фациальном изменении пород кукрусеского горизонта, с одной стороны, и о фауне пограничных слоев ухакусского и кукрусеского горизонтов, с другой стороны. Литологические критерии при корреляции разрезов оказывались бесплодными из-за наличия слоев горючего сланца как в кукрусеском, так и в ухакусском горизонтах.

В результате исследований автора выяснилось, что фауна ухакусского горизонта относительно резко изменяется выше подошвы сланцевого слоя А, залегающего внизу промышленной пачки горючего сланца. Подошва слоя А представляет из себя, по сообщению С. С. Баукова, почти повсеместно поверхность размыва. Таким образом, подтверждается вариант Х. Беккера о нижней границе кукрусеского горизонта, предложенный им еще в 1924 г. Приведем, однако, для этого фактические данные.

В восточной части Эстонии и в западной части Ленинградской области имеются четыре обнажения — Убья, Кивиыли, Кукрусе и Веймарн — где можно наблюдать самые верхние слои ухакусского горизонта (верхи убьяского подгоризонта $C_{1c\beta}$), залегающие непосредственно ниже сланцевого слоя А; здесь обнажаются синевато-серые до зеленовато-серых мергелистые известняки, с прослоями горючего сланца (рис. 2). В этих слоях был собран довольно богатый фаунистический материал, часть которого представлена в таблице 1.

Несмотря на то, что не все эти виды встречаются во всех названных обнажениях, данный комплекс фауны для убьяского подгоризонта ухакусского горизонта ($C_{1c\beta}$) является довольно характерным; все отмеченные виды встречаются в большом количестве. Уже в самых нижних слоях промышленной пачки горючего сланца (сланцевые слои А, В, С) и прослоях известняка встречается фауна другого характера, чем показанная в табл. 1. Очень богатый фаунистический материал, собранный из этих слоев по многим обнажениям сланцевого бассейна, содержит много видов, которые в ухакусском горизонте не встречаются. С другой стороны, в этой фауне имеются почти все виды, известные из уха-

Фауна верхних слоев С₁с_β Прибалтики

Местонахождение Вид	Зап. Эст.	Вост. часть Эстонии			Ленингр. обл.
	Ласнамяги (Таллин)	Убья	Кивиыли	Кукресе	Веймарн
<i>Asaphus (Neoasaphus) robergi</i> Wiman.		+	+		
<i>A. (Neoasaphus) nieszkowskii</i> Schm.	+	++	++		+
<i>Ceraurus aculeatus</i> Eichw.	+	+	+	+	
<i>Chasmops odini</i> (Eichw.)	+	+		++	
<i>Hoplotichas conicotuberculatus</i> (Nieszk.)	+			+	+
<i>Iliaenus schmidti</i> Nieszk.	+		+		+
<i>Lonchodomas rostratus</i> (Sars)			+	+	
<i>Cliftonia dorsata</i> (His.)	+	+	+		+
<i>Clitambonites schmidti schmidti</i> (Pahl.)	+	+	+	+	+
<i>C. squamatus</i> (Pahl.)	+			++	+
<i>Cyrtototella kuckersiana kuckersiana</i> (Wys.)	+			++	
<i>Estlandia marginata</i> (Pahl.)	+	+	+	++	+
<i>Glossorthis tacens</i> Öpik	+		+	+	+
<i>Leptaena trigonalis</i> (Schm.)	+	+			
<i>Leptelloidea leptelloides</i> (Bekk.)	+	+	+	+	+
<i>Leptestia musculosa</i> Bekker	+		+	+	+
<i>Palaeostrophomena concava</i> (Schm.)			+		+
<i>Platystrophia biforata</i> (Schloth.)		+	+		+
<i>P. dentata</i> (Pand.)	+	+		+	+
<i>Porambonites aequirostris</i> (Schloth.)	+	+	+		+
<i>P. deformatus</i> (Eichw.)	+	+	+		+
<i>Pseudocrania planissima</i> (Eichw.)	+	+	+	+	+
<i>Sowerbyella liliifera</i> Öpik	+	+	+	+	+
<i>S. semiluna</i> Öpik	+	+	+	++	
<i>Vellamo pyramidalis</i> (Pahl.)	+		+	+	
<i>Öpikina dorsata dorsata</i> (Bekk.)	+	+	+	+	+
<i>Cheirocrinus granulatus</i> Jkl.	+			+	
<i>Echinosphaerites aurantium supra</i> Heck.	+	+	+	+	+
<i>Heliocrinites balticus</i> (Eichw.)	+				+

куского и даже ласнамяэского горизонтов; однако количество новых видов значительно превосходит количество старых. Главнейшими представителями фауны нижних слоев горизонта кукресе (типовая фауна (С₁₁с_α)) являются следующие виды:

- Asaphus (Neoasaphus) robergi* Wiman
Cybele (Cybelella) rex (Nieszk.)
C. (Cybelella) coronata Schm.
Dimeropyge minuta Öpik
Iliaenus oblongatus var *kuckersiana* Holm
Lichas kuckersianus Schm.

Lonchodomas rostratus (Sars.)
Nieszkowskia ahti Öpik
N. cephaloceras (Nieszk.)
Otarion planifrons (Eichw.)
Pseudasaphus tecticaudatus (Steinh.)
Pseudobasilicus kuckersianus (Schm.)
Pterygometopus kuckersianus Schm.
Reraspis plautini (Schm.)
Haploprimitia molli (Bonn.)
Uhakiella kohtlensis Öpik
Öpikium tenerum (Öpik)
Glossorthis tacens Öpik
Hesperorthis inostrantzeji (Wys.)
Kullervo panderi Öpik
Leptaena juvenilis Öpik
L. trigonalis (Schm.)
Nicolella sp. n.
Sowerbyella liliifera Öpik
Nematopora ovalis Ulrich
Pachydictya kuckersensis Bekk.
Phylloporina furcata (Eichw.)
Pseudohornera bifida (Eichw.)
Aristerella nitiduloides Bekk.
Ctenodonta aedilis (Eichw.)
Clathrospira inflata Kok.
Lophospira subalata (Kok.)
Echinosphaerites aurantium supra Heck.

Учитывая такое резкое изменение фауны по подошве промышленной пачки горючего сланца и большое литологическое отличие от пород, лежащих выше и ниже ее (наличие поверхности размыва, появление слоев горючего сланца значительно большей мощности), следует признать, что положение нижней границы кукурусеского горизонта, намеченное нами, является вполне обоснованным. Однако характер нижней границы кукурусеского горизонта в пределах Эстонской ССР не везде одинаковый, что зависит от различных фациальных условий. В западной части Эстонии, где, как известно, отсутствуют промышленные слои горючего сланца, разрезы как в ухакуском, так и в кукурусеском горизонте являются во многом более однообразными и более сходными между собой, чем в восточной части Эстонии. Установление нижней границы кукурусеского горизонта в западной части Эстонии было возможно благодаря детальному послойному сбору фауны. Особенно важными в этом отношении являются обнажения Хумала и Ласнамяги, откуда происходит богатый фаунистический материал.

В Ласнамяги границей ухакуского и кукурусеского горизонтов является очень сильно пиритизированная хорошо выраженная поверхность размыва, которую, однако, в самих каменоломнях ви-

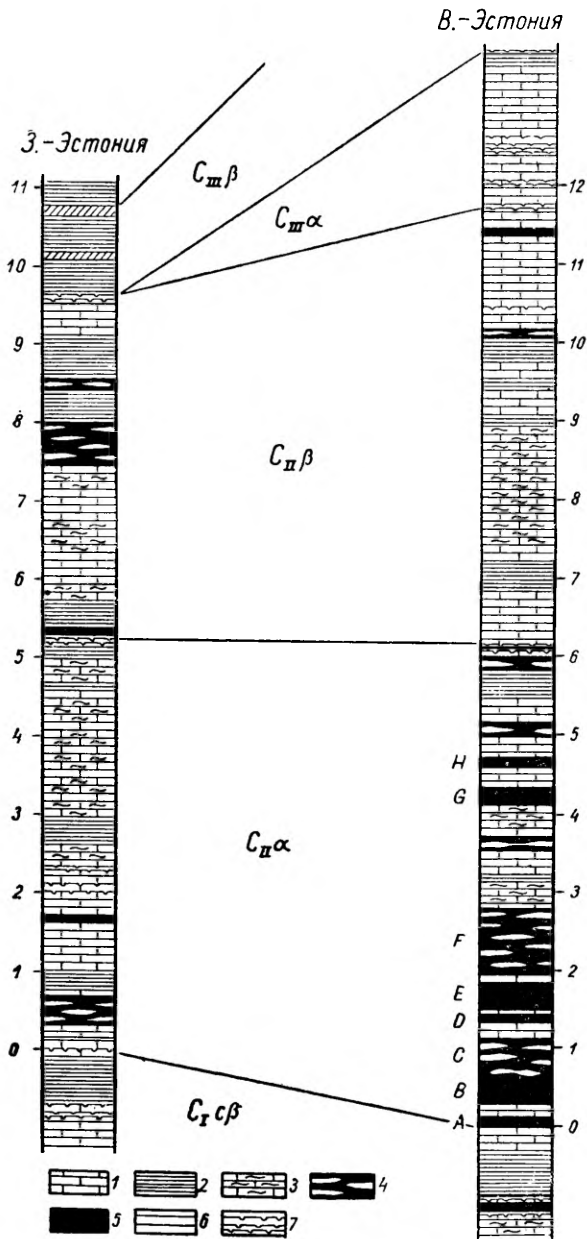


Рис. 2. Корреляция разрезов кукрусского горизонта. $C_I^c^{\beta}$ — убьяский подгоризонт ухакусского горизонта; C_{II}^{α} — кохтлаский и C_{II}^{β} хумалаский подгоризонты кукрусского горизонта; C_{III}^{α} — оямааский и C_{III}^{β} шундоровский подгоризонты идавьерского горизонта. В легенде: 1 — толстослойный известняк, 2 — тонкослойный известняк, 3 — известняк с тонкими прослоями горячего сланца, 4 — горячий сланец с прослоями известняка, 5 — горячий сланец, 6 — метабентонит, 7 — пиритизированные поверхности размыва. Вертикальный масштаб в метрах. Латинскими буквами отмечены промышленные слои горячего сланца.

деть не удастся, т. к. она находится примерно на 50 см выше бровки карьера (рис. 2). Эта часть разреза была вскрыта в одном временном обнажении между большими каменоломнями и улицей Пунане. Верхние слои убьяского подгоризонта ($C_{1c\beta}$) в каменоломнях представлены макроскопически синевато-серыми до зеленовато-серых, обычно мергелистыми, частью комковатыми известняками, переслаивающимися с тонкими прослоями (0,5—1,0 см) горючего сланца. Из этих слоев собрана многочисленная фауна, часто встречаемые виды которой отмечены в таблице 1.

Кверху от указанной поверхности размыва состав породы изменяется; появляется больше прослоев горючего сланца, мощность которых достигает 7 см, известняк становится более комковатым и т. д. Фауна в этих слоях включает много новых элементов и может быть представлена такими видами, как:

- Asaphus (Neosaphus) nieszkowski* Schm.
- Chasmops tallinnensis* Öpik
- Cybele (Cybelella) revaliensis* Schm.
- Iliaenus oblongatus* var. *kuckersiana* Holm
- Nieszkowskia cephaloceras* (Nieszck.)
- Pseudobasilicus kuckersianus* (Schm.)
- Actinomena quintana* (Öpik)
- Clitambonites squamatus* (Pahl.)
- Cyrtonotella kuckersiana kuckersiana* (Wys.)
- C. barbara* Öpik
- Dalmanella navis* Öpik
- Estlandia marginata* (Pahl.)
- Kullervo lacunata* Öpik
- Platystrophia sublimis* Öpik
- Porambonites aequirostris* (Schloth.)
- Sowerbyella liliifera* Öpik
- S. semiluna* Öpik
- Vellamo rara* Öpik
- Öpikina dorsata dorsata* (Bekk.)
- Dendrocystites kuckersiana* Heck.
- Hoplocrinus grewingki* Öpik
- H. tallinnensis* Öpik
- Rhipidocystis esthona* Heck.
- Aristerella nitiduloides* Bekk.
- Subulites priscus* Eichw.
- Lophospira subalata* (Kok.)

Все это с несомненностью показывает, что мы имеем здесь дело уже с нижними слоями кукуреского горизонта (рис. 2).

В связи с установлением нижней границы горизонта кукуресе в районе ласнамяэских каменоломен выше бровки карьера, следует дать некоторые коррективы в отношении взглядов многих авторов, которые считают, что кукуреский горизонт обнажается в

самых каменоломнях Ласнамяги. Такой неправильный вывод имеется в работах Ф. Ш м и д т а (1881—1908), далее у Р. С. Б э с с л е р а (1911), П. Р а й м о н д а (1916), Х. Б е к к е р а (1921—1924), в работах А. Э п и к а и др. Все эти авторы верхние слои мергелистых известняков с тонкими прослойками горючего сланца в больших ласнамяэских каменоломнях причислили к кукурескому горизонту, но в действительности эти слои, как видно из предыдущего, относятся к верхам ухакусского горизонта (подгоризонт $C_{1c\beta}$)

Южнее выхода кукуреского горизонта в западной части Эстонии нижняя граница его представляет собою одну или две поверхности размыва, аналогичные поверхностям размыва нижней границы в обнажениях. Однако в самых южных разрезах буровых скважин, на нижней границе, поверхности размыва отсутствуют, и граница была определена, главным образом, на основании других литологических признаков.

Первые корреляции разрезов самых южных буровых скважин Восточной Эстонии с разрезами в скважинах на выходе дает Х. Беккер (1924). По данным последнего, мощность кукуреского горизонта в скважине Тыкке (севернее от о. Чудского) необычайно велика — 16,87 м. При учете относительно равномерной мощности C_{II} в бассейне горючих сланцев этот факт был труднообъясним. Кроме того, в нижней части кукуреского горизонта скважины Тыкке (по разрезу Х. Беккера) встречаются многие довольно мощные слои горючего сланца, которые до сих пор рассматривались как синхронные промышленным слоям в области выхода (Х. Беккер, 1924 и др.). Исследованием автора, однако, установлено, что промышленные слои сланца в разрезе скважины Тыкке отсутствуют, а «промышленные слои горючего сланца» Х. Беккера в действительности относятся к убьяскому подгоризонту ухакусского горизонта ($C_{1c\beta}$). Таким образом, и мощность кукуреского горизонта в разрезе скважины Тыкке представляется нормальной — 13,51 м. Хотя мощность слоев горючего сланца в убьяском подгоризонте ухакусского горизонта в направлении выхода сильно уменьшается, следует отметить, что и эти слои, при дальнейшем развитии техники добычи сланца, могут получить промышленное значение в качестве «второй пачки промышленных слоев».

Верхняя граница. Мощность

О верхней границе кукуреского горизонта до сих пор высказано два мнения. По Х. Б е к к е р у, ею служит кровля самого верхнего более мощного слоя горючего сланца (1923, стр. 40). Аналогичный взгляд несколько позже высказал и А. Э п и к (1927 стр. 4—5). Оба эти автора исходили, повидимому, только из данных литологии, не обосновывая свои взгляды фаунистически.

Другое мнение о верхней границе кукуреского горизонта вы-

сказал В. Я а н у с с о н, который считает, что ее следует проводить по очень ясной двойной поверхности размыва, с которой совпадает, во-первых, завершение по разрезу комплекса пород, состоящего из переслаивания известняков и горючих сланцев в Западной Эстонии, и, во-вторых, значительное изменение в фауне (1945, стр. 213).

Автор настоящей статьи исходил — *a priori* — от последнего представления и пытался окончательно выяснить этот вопрос, основываясь на обширном фактическом материале.

На выходах кукрусского горизонта вышеуказанная поверхность размыва обнажается в нескольких местах в западной части Эстонии (Хумала, Харку, Ласнамяги (Сымяги) и др.) и в одном обнажении (Уникюла, на берегу Пуртсе) в восточной части Эстонии.

В обнажении Сымяги верхние слои кукрусского горизонта характеризуются обилием маломощных прослоек горючего сланца, которые чередуются с синевато-серыми или коричневатого-серыми до светлокоричневыми, комковатыми известняками. Этот комплекс слоев вверху оканчивается двойной поверхностью размыва. Верхняя поверхность размыва — сильно пиритизированная, почти ровная, с отдельными маленькими ходами. В среднем на 1,5 см ниже этой поверхности находится вторая пиритизированная поверхность, в отличие от верхней более волнистая, с отдельными довольно глубокими ходами.

Известковые породы, залегающие выше описанных поверхностей размыва, относятся уже к шундоровскому подгоризонту идавереского горизонта ($C_{III\beta}$) и содержат, между прочим, два слоя метабентонита (рис. 2).

Опираясь на фаунистический материал, собранный в названных выше обнажениях из слоев непосредственно ниже поверхностей размыва, верхние слои кукрусского горизонта можно характеризовать следующей фауной:

Asaphus (Neoasaphus) nieszkowski Schm.

Chasmops odini (Eichw.)

Cybele (Cybelella) rex (Nieszk.)

Pterygometopus exilis (Eichw.)

Dalmanella navis Öpik

Estlandia marginata magna Öpik

Hesperorthis inostrantzeji (Wys.)

Leptelloidea musca Öpik

Platystrophia cf. lynx lynx (Eichw.)

Schizoramma freiija (Öpik)

Öpikina sp. n.

Hoplocrinus pseudodicyclicus Öpik

В шундоровском подгоризонте идавереского горизонта ($C_{III\beta}$) встречается в западной части Эстонии, по данным Р Мянниль, фауна совсем другого облика:

Asaphus (Neoasaphus) nieszkowskii var. *itferensis* Schm.
Chasmops emarginata Schm.
Ch. marginata Schm.
Ch. mutica Schm.
Conolichas peri Warburg
Hemisphaerocoryphe pseudohemocranium (Nieszk.)
Illaenus jevensis Holm
Actinomena orta (Öpik)
Dalmanella aff. *navis* Öpik
Doleroides sp. n.
Leptelloidea musca Öpik
Platystrophia chama Eichw
P. dentata (Pand.)
Öpikina dorsata dorsata (Bekk.)
Ischadites murchisoni (Eichw.)
Pyritonema subulare (Roemer)
Mastopora concava Eichw.

Таким образом, верхняя граница кукурусеского горизонта в западной части Эстонии характеризуется как фаунистически, так и литологически очень хорошо. Кроме того, надо обратить внимание на то обстоятельство, что в западной части Эстонии отсутствует нижний, оямааский подгоризонт идавереского горизонта ($C_{III\alpha}$), что в свою очередь увеличивает литологические и фаунистические различия между $C_{II\beta}$ и $C_{III\beta}$ (рис. 2).

Единственным обнажением в восточной части Эстонии, где обнажается верхняя граница кукурусеского горизонта, является левый берег реки Пуртсе у Уникюла. Поверхность размыва на верхней границе здесь очень сильно пиритизирована и с глубокими ходами. Верхние слои хумалаского подгоризонта литологически схожи с верхними слоями $C_{II\beta}$ в западной части Эстонии. Нижние слои оямааского подгоризонта идавереского горизонта ($C_{III\alpha}$) представлены, по данным Р Мянниль, известняками светло-серого или желтовато-серого цвета, которые содержат маленькие зерна окиси железа и в которых встречается ряд пиритизированных поверхностей размыва (рис. 2).

Фауна оямааского подгоризонта почти всегда окремненная и, по Р Мянниль, характеризуется следующими видами:

Chasmops wrangeli Schm.
Conolichas triconicus Dames
Sphaerocoryphe hübnerei Schm.
Clitambonites schmidti epigonus Öpik
Doleroides sp. n.
D. holmi (Wys.)
Platystrophia chama Eichw.
P. lynx lynx (Eichw.)

Pseudocrania depressa (Eichw.)
Porambonites baueri Noetling
Mastopora concava Eichw
Schroederoceras danckelmanni (Rem.) и др.

Для сравнения укажем на список типовой фауны мезофауны Савала (С_{II}βS) на стр. 128.

Поверхность размыва на верхней границе кукурусеского горизонта распространяется и во всех разрезах буровых скважин, находящихся южнее выхода, кроме разрезов некоторых скважин в Центральной Эстонии. Везде эта граница одинакового характера,

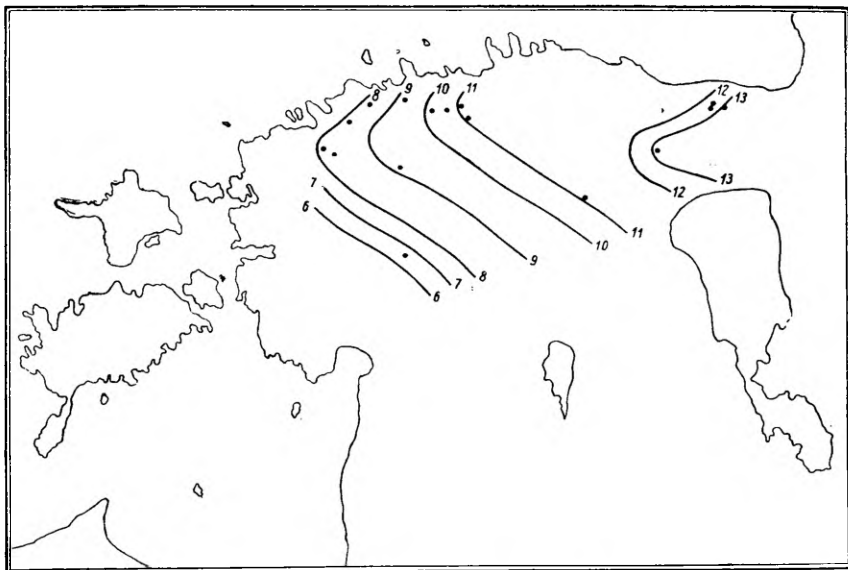


Рис. 3. Схема мощностей кукурусеского горизонта. Изопахиты через 1 м.
 Точками намечены скважины.

лишь число поверхностей размыва может колебаться от одного до трех.

Из изложенного можно сделать единственный вывод — представление В. Януссона о верхней границе кукурусеского горизонта вполне оправдано. Значительное изменение и в фауне и в седиментации, без сомнения, указывает на большое стратиграфическое значение верхней границы кукурусеского горизонта, которая представляет собою в то же время и границу между пуртесским и сауэским ярусами (А. Рыбусокс 1956, стр. 23). Учитывая чрезвычайно большое региональное распространение поверхности размыва, маркирующей верхнюю границу кукурусеского горизонта, можно уверенно сказать, что последняя является одним из самых выгодных уровней при корреляции ордовикских отложений Эстонии.

При учете вышеприведенных нижней и верхней границ, мощность кукрусеского горизонта в Эстонской ССР колеблется в пределах 6,4—13,50 м (рис. 3).

О развитии фауны кукрусеского горизонта

Фауна кукрусеского горизонта уже давно привлекала внимание палеонтологов, изучавших ордовик Прибалтики. Это вполне понятно, так как фауна кукрусеского горизонта имеет очень хорошую сохранность и является самой богатой из всех горизонтов эстонского ордовика и силура: до сих пор установлено наличие 343 видов, в том числе 20 новых видов (брахиоподы, пластинчатожаберные, трилобиты, остракоды и иглокожие). Фактически количество видов в кукрусеском горизонте значительно больше, чем указано, так как автор, к сожалению, не мог учесть наутилоидей, конулярий и частично мшанок из западных мезофаций, которые до сих пор остаются почти совсем еще не обработанными.

Поскольку здесь нет необходимости приводить полный список фауны кукрусеского горизонта, ссылаемся на списки фауны среднего ордовика Эстонской ССР приведенный в работе Д. Кальо и др. (1956), где указана и фауна кукрусеского горизонта.

Фауна кукрусеского горизонта развивалась в продолжении длительного периода, с начала среднего ордовика, и знаменует собой завершение первого этапа развития фауны среднего ордовика (пуртсеский ярус, А. Рыымусокс, 1956). Чтобы лучше понять это, следует остановиться прежде всего, хотя бы кратко, на развитии фауны нижележащего ухакусского горизонта и самого нижнего горизонта среднего ордовика — ласнамяэского. Старейшими элементами фауны кукрусеского горизонта являются, за некоторыми исключениями, виды, иммигрировавшие еще в начале ласнамяэского времени.

В начале ухакусского времени наблюдается появление новых элементов, но в то же время в ухакусский горизонт переходит большая часть фауны, иммигрировавшая в начале ласнамяэского времени.

Граница между раазикуским (C_{1ca}) и убьяским (C_{1cb}) подгоризонтами ухакусского горизонта намечается появлением некоторых новых видов, например:

- Pterygometopus kuckersianus* Schm.
- Cybele (Atractopyge) xipheres* Öpik
- Stellipora revaliensis* (Dyb.)
- Glossorthis virgata* Öpik
- Vellamo pyramidalis* (Pahlen)
- Leptaena juvenilis* Öpik
- Palaeostrophomena concava* (Schm.)
- Bockia sculpta* Heck.
- Diplograptus bekkeri* Öpik и др.

В конце ухакуского времени из пределов Эстонской ССР исчезают существовавшие здесь короткое время такие виды, как:

Heliocrinites araneus (Schloth.)
H. balticus (Eichw.)
Cyathocystis plautinae Schm.
Öpikina imbrexioidea Sokolskaja
Palaeostrophomena concava (Schm.)
Plectambonites radiatus (Schm.)
Platystrophia biforata (Schloth.)
Porambonites deformatus (Eichw.)
Iliaenus intermedius Holm и др.

Преобладающая часть видов ухакуского горизонта, однако, переходит в кукрусский горизонт, и в большинстве случаев эти виды встречаются в С_{II} гораздо чаще, чем в самом ухакуском горизонте, что придает этим видам особенное биостратиграфическое значение. К этим, уже ранее известным, видам в начале кукрусского времени прибавляются в значительной мере новые для среднего ордовика Эстонии виды, как:

Basilicus lutsi Öpik
Ceratocephala kuckersiana (Schm.)
Chasmops tallinnensis Öpik
Cybele (Cybelella) coronata Schm.
Dimeropyge minuta Öpik
Lichas kuckersianus Schm.
L. squamulosus Öpik
L. wimani Öpik
Nieszkowskia capitalis Öpik
Nieszkowskia cephaloceras (Nieszk.)
N. ahti Öpik
Otarion planifrons (Eichw.)
Panarchaeogonus parvus Öpik
Pseudobasilicus kuckersianus (Schm.)
Remopleurides nanus elongatus Schm.
Reraspis plautini (Schm.)
Macronotella kuckersiana (Bonn.)
Chilobolbina dentifera (Bonn.)
Platybolbina kapteyni (Bonn.)
Rakverella bonnemai Öpik
Ctenonotella elongata Öpik
Vellamo viruana Öpik
V. parva Öpik
V. rara Öpik
Cyrtonotella laine Öpik
C. barbara Öpik
Platystrophia sublimis Öpik

Triplecia columba Öpik
Philhedra baltica Kok.
Pseudopholidops pseudocranioides Bekk.
Ahtioconcha auris Öpik
Ctenodonta aedilis (Eichw.)
Phylloporina furcata (Eichw.)
Pseudohornera bifida (Eichw.)
Kukersella bassleri Toots
Enallopora wimani (Reed)
Dendrocystites kukersiana Heck.
Hoplocrinus grewingki Öpik
H. tallinnensis Öpik
H. pseudodicycliticus Öpik
Protocrinites fragum (Eichw.) и многие другие.

Различные физико-географические условия, существовавшие в пределах Эстонии в первой половине кукуреского времени (кохтлаский подгоризонт — C_{IIa}), отражались и в развитии фауны. Повидимому, условия жизни в пределах мезофации Харку кохтлаского подгоризонта (C_{IIaHa}) были значительно хуже, чем в мезофации Виру (C_{IIaV}). Прежде всего это проявляется в обилии фауны как по видовому составу, так и по богатству особей в пределах мезофации Виру, в то время как в пределах мезофации Харку обитала фауна, образующая только половину состава фауны мезофации Виру (в C_{IIaV} встречаются 319 видов, в C_{IIaHa} — 127 видов).

В середине кукуреского времени в богатой фауне кохтлаского подгоризонта намечается тенденция к объединению, которая, однако, в области распространения мезофаций Харку и Виру проявляется различно: из 127 видов, встречающихся в мезофации Харку кохтлаского подгоризонта, переходят в мезофацию Хумала хумалаского подгоризонта 63 вида или 50%, в то же время в мезофации Савала хумалаского подгоризонта известно только 53 вида или 16% из фауны мезофации Виру кохтлаского подгоризонта. Как видно, различия в количестве видов между подгоризонтами являются довольно большими. Из видов, которые не встречаются в хумаласком подгоризонте, но часто встречаются в кохтласком подгоризонте, можно назвать:

Philhedra baltica Kok.
Glossorthis tacens Öpik
Leptestia musculosa Bekk.
Öpikina jaervensis (Bekk.)
Sowerbyella eha Öpik
S. liliifera Öpik
Leptaena juvenilis Öpik
Kullervo panderi Öpik
Vellamo parva Öpik

Porambonites laticaudatus Bekk.
Ceraurus aculeatus Eichw
Lichas kuckersianus Schm.
Nieszkowskia cephaloceras (Nieszk.)
Asaphus (Neoasaphus) robergi Wiman
Ctenodonta aedilis (Eichw.)
Lophospira subalata (Kok.),

многие остракоды и др. При этом надо все-таки подчеркнуть, что в то же время, когда происходит общее обеднение фауны, можно наблюдать массовое наличие особой некоторых видов, которые образуют как бы фон для остальной фауны. В мезофации Хумала хумалаского подгоризонта такими формами являются:

Hesperorthis inostrantzefi (Wys.)
Dalmanella navis Öpik
Pterygometopus exilis (Eichw.)
Leptelloidea musca Öpik

для мезофации Савала хумалаского подгоризонта такими формами являются:

Hesperorthis inostrantzefi (Wys.)
Porambonites aequirostris (Schloth.)
Echinospira aurantium supra Heck.

Эти существенные изменения в фауне послужили для автора основой при определении границы между кохтласким (С_{IIa}) и хумаласким (С_{IIβ}) подгоризонтами и при общей характеристики хумалаского подгоризонта вообще (стр. 124)

В конце кукуреского времени появляются в мезофации Хумала хумалаского подгоризонта некоторые новые виды, которые, однако, не получают более широкого распространения. Такими видами являются:

Illaenus? sp. n. Öpik *
Leptaena crypta Öpik
Schizoramma freija (Öpik)
Platystrophia cf. lynx lynx (Eichw.)
Öpikina sp. n. и др.

Верхняя граница кукуреского горизонта в виде поверхности размыва намечает, несомненно, существенное изменение физико-географической обстановки (стр. 113). Из фауны кукуреского горизонта переходит в идаверский горизонт только сороковидовая реликтовая фауна. В то же время появляется в идаверском горизонте новая фауна, которая существует вместе с более новыми элементами в ордовикском бассейне Прибалтики до конца среднего ордовика (А. Рыымусокс, 1956, стр. 22—23).

* Этот вид относится, по В. Яануссону, повидимому, к роду *Pandertia* Volborth (В. Яануссон, 1954, стр. 565).

Кохтлаский подгоризонт (C_{IIa})

Различия, выявленные исследованиями автора в составе фауны и в литологическом характере пород между нижней и верхней частями кукурусеского горизонта, как в Западной — так и Восточной Эстонии, с одной стороны, локальный характер прежних стратиграфических схем (частично их несоответствие действительности), с другой стороны, послужили причиной введения нового расчленения кукурусеского горизонта.

Кукурусеский горизонт расчленяется на два подгоризонта: нижний, кохтлаский подгоризонт (C_{IIa}) и верхний, хумалаский подгоризонт ($C_{II\beta}$). Название — кохтлаский — было предложено нижней части кукурусеского горизонта уже В. Януссоном (1945, стр. 219). и оно употребляется и в настоящей работе, хотя объем кохтлаского подгоризонта, по мнению автора, несколько шире, чем в расчленении В. Януссона. Граница между C_{IIa} и $C_{II\beta}$ не совпадает с границей между C_2 и C_3 , по расчленению А. Эпика, а также границей кохтлаского и «верхнего» подгоризонтов В. Януссона (рис. 1) Она находится примерно на 1,3 м выше последнего промпласта горючего сланца «Н» и выражена в Восточной Эстонии в виде комплекса из двух пиритизированных поверхностей размыва со слоем горючего сланца между ними (рис. 2). Этот комплекс прослеживается во всех многочисленных разрезах буровых скважин сланцевого бассейна, а обнажается только в двух обнажениях: в Савала (на берегу реки Пуртсе) и в сланцевых карьерах Кюттейу.

Граница подгоризонтов установлена на основе изменения фауны. Оказывается, что богатая и разнообразная фауна кохтлаского подгоризонта, которая собрана из многочисленных обнажений Восточной Эстонии, не распространяется выше пограничного комплекса (стр. 117) То же самое наблюдается и в обнажениях Западной Эстонии, где в качестве синхронной границы выявился или комплекс из нескольких пиритизированных поверхностей размыва или только одна четкая поверхность размыва (рис. 2).

Совсем своеобразно выражена граница между C_{IIa} и $C_{II\beta}$ в сланцевых карьерах Убья. Здесь встречаются в слоях мощностью в 0,8 м, лежащих выше промпласта «Н» 6 очень сильно пиритизированных поверхностей размыва с глубокими ходами. Является ли самая верхняя поверхность размыва в разрезе Убья синхронной с границей C_{IIa} и $C_{II\beta}$ в других разрезах или нет — этот вопрос пока неясен.

В разрезах более южных скважин поверхности размыва на границе подгоризонтов отсутствуют, и сама граница была определена лишь опираясь на общие литологические и фаунистические признаки (характер фации и т. д.). Разумеется, что в области, находящейся далеко от выхода, граница эта является в из-

вестной степени условной, так как не имеется достаточного количества фаунистических данных.

Мощность кохтлаского подгоризонта колеблется в пределах 3,2—7,37 м. Наименьшая мощность наблюдается в Северо-Западной и Юго-Западной Эстонии, наибольшая в Восточной Эстонии.

Ф а ц и и. На существование разных фаций в кукуреском горизонте впервые обратил внимание А. Эпик, различавший восточную сланцевую фацию и западную известковую фацию (1925, стр. 6)

Как показали исследования автора, кукуреский горизонт оказывается фациально более дифференцированным, чем предполагалось до сих пор. Фаунистические и литологические различия, установленные в кохтласком подгоризонте, допускают выделение в нем двух мезофаций.* В Западной и Юго-Западной Эстонии распространяется мезофация Харку ($S_{IIa}Na$), названная так по типичному обнажению. В Восточной же Эстонии и далее на восток распространяется мезофация Виру ($S_{IIa}V$), на территории распространения которой имеется ряд хороших обнажений в виде открытых карьер горючего сланца (рис. 4). В качестве типового обнажения мезофации Виру был выбран старый открытый карьер в Кохтла-Ярве (у А. Эпики 1927—1930, «Кохтла»), откуда собрано большинство фаунистического материала кохтлаского подгоризонта.

Мезофация Харку ($S_{IIa}Na$)

По данным глубокого бурения, мезофация Харку распространяется не только в области выхода, но простирается и далее на юг, в Центральную Эстонию. В обнажениях Западной Эстонии, в промежутке между полуостровом Палдиски и г. Таллин, в большинстве случаев из слоев S_{II} обнажаются слои $S_{IIa}Na$. Обнажения же на Ласнамяги находятся, повидимому, уже в области переслаивания мезофаций Харку и Виру (в нижней части S_{IIa} встречаются относительно толстые прослои — 3—4 см — горючего сланца) (рис. 4).

Литологически характерны для мезофации Харку в обнажениях более или менее чистые известняки синевато-серого, зеленовато-серого или коричневатого цвета, в подавляющем большинстве тонкослоистые и комковатые. В известняках встречаются местами чаще, местами же реже, коричневатые ходы червей и пиритизированные мелкие фрагменты окаменелостей. Очень типичным следует, однако, считать малое наличие горючего сланца. Встречаются только тонкие прослои (1—2 см), которые сосредоточены комплексами, мощностью 0,2—0,3 м. Более толстые слои горючего сланца появляются, как выше сказано, только в

* О классификации фаций см. Г. И. Теодорович, 1948, стр. 1620.

окрестностях г. Таллин, в нижней части кохтлаского подгоризонта (рис. 2). В разрезах старых обнажений, в которых породы подверглись выветриванию, прослеживается ритмичное чередование слоев чистого известняка со слоями более мергелистого известняка. В разрезах средней части $C_{II\alpha}$ встречается обычно целый ряд пиритизированных поверхностей размыва, которые, однако, не являются выдержанными на больших площадях.

Почти такой же характер имеет мезофашия Харку в разрезах буровых скважин южнее выхода. В общем, можно наблюдать увеличение мощности мергелистых прослоев в разрезе, еще

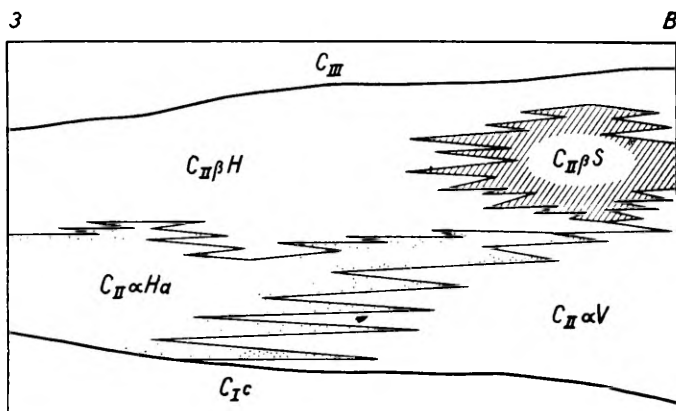


Рис. 4. Схема фаций кукурусского горизонта в Северной Эстонии в промежутке Вазалемма (запад) и Сомпа (восток). C_{Ic} — ухакусский горизонт; $C_{II\alpha Na}$ — мезофашия Харку и $C_{II\alpha V}$ — мезофашия Виру кохтлаского подгоризонта кукурусского горизонта; $C_{II\beta H}$ — мезофашия Хумала и $C_{II\beta S}$ — мезофашия Савала хумалаского подгоризонта кукурусского горизонта; C_{III} — идавереский горизонт.

меньше встречается прослоев горячего сланца, а поверхности размыва почти отсутствуют. Количество последних, однако, увеличивается в западных разрезах, вместе с тем они становятся более четкими и более пиритизированными.

Фауна мезофашии Харку в области выхода довольно хорошо известна (кроме мшанок и частично остракод). В общем, эта фауна значительно беднее фауны мезофашии Виру. Фауна мезофашии Харку тесно связана с фауной мезофашии Виру, так как подавляющая часть ее встречается и в $C_{II\alpha V}$, но уступает последней по количеству видов и индивидов.

Типичная фауна мезофашии Харку состоит из следующих видов:

Asaphus (Neoasaphus) nieszkowski Schm.
Chasmops tallinnensis Öpik

Ceraurus aculeatus Eichw.
Iliaenus oblongatus var. *kuckersiana* Holm
Dalmanella navis Öpik
Cliftonia dorsata (His.)
Clitambonites schmidti (Pahl.)
Cyrtonotella kuckersiana kuckersiana (Wys.)
Hesperorthis inostrantzefi (Wys.)
Kullervo lacunata Öpik
Leptaena trigonalis (Schm.)
Sowerbyella eha Öpik
Vellamo pyramidalis (Pahl.)
V. rara Öpik
Bucania radiata czekanowskii Schm.
Clathrospira inflata Kok.
C. elliptica (His.)
Cymbularia galeata Kok.
Eccyliomphalus princeps (Rem.) mut. γ (Kok.)
Kokenospira retifera Öpik
Lesueurilla marginalis mut. *a* Kok.
Subulites revaliensis Kok.
Hoplocrinus grewingki Öpik
H. tallinnensis Öpik

Эта типичная фауна состоит из видов, которые встречаются почти в каждом обнажении С_{IIa}На. Кроме того, следует отметить, что в фауне мезофации Харку играют большую роль гастроподы и пластинчатожаберные, которые встречаются здесь несравненно чаще, чем в обнажениях мезофации Виру. Довольно часто встречается и *Porambonites aequirostris* (Schloth.). некоторые *Sowerbyella* и др.

Несколько своеобразная фауна встречается в обнажений С_{IIa} на Ласнамяги. Кроме типичной фауны С_{IIa}На, встречается здесь целый ряд видов, которые отсутствуют во всех других обнажениях в Западной Эстонии, но встречаются в слоях мезофации Виру. Таковы следующие виды:

Asaphus (Neoasaphus) robergi Wiman
Lichas kuckersianus Schm.
Reraspis plautini (Schm.)
Kullervo panderi Öpik
Triplecia columba Öpik
Temnodiscus aff. ingricus (Vern.)
Ctenodonta aedilis (Eichw.)
C. macromya (Eichw.)
Polyptychella esthona Jkl.

Эта смешанная фауна, несомненно, еще раз указывает на то, что обнажения на Ласнамяги находятся в области переслаивания мезофации Харку в Виру (стр. 120 и рис. 4).

Мезофация Виру ($C_{II\alpha V}$)

Основной областью распространения мезофагии Виру является сланцевый бассейн в Восточной Эстонии. На восток продолжается распространение $C_{II\alpha V}$ в Ленинградскую область.

В области выхода кукрусеского горизонта к мезофагии Виру относятся самые большие обнажения — карьеры горячего сланца в Восточной Эстонии. Стратиграфически более существенными обнажениями можно назвать старые карьеры Кохтла-Ярве, откуда собрана подавляющая часть фауны $C_{II\alpha}$ вообще, и карьеры Кюттейгу.

Литологическая характеристика мезофагии Виру довольно своеобразна: разрез $C_{II\alpha}$ состоит из чередующихся друг с другом слоев горячего сланца и известняка, причем регионально изменяется мощность обоих компонентов, но общий ритм остается неизменным. Большая мощность слоев горячего сланца является самой характерной чертой мезофагии Виру. Эти слои являются продуктивными и добываются в целом ряде карьеров и шахт во все возрастающем количестве.

Слои, годные для выработки (промпласты) отмечены снизу вверх буквами А, В, С, D, E, F G и H. Все эти слои горячего сланца переслаиваются со слоями комковатого известняка коричневатого-серого или светлокоричневатого цвета (рис. 2). В известняках встречаются коричневатые или светлые ходы червей. Из общей мощности $C_{II\alpha}$ слои горячего сланца образуют большую часть. Они представлены или полностью горючими сланцами (напр. слои А, В, С, D, H), или же содержат прерывистые прослойки известняка (слои E, F G). Преобладающая масса горючих сланцев сосредоточена к нижней половине кохтлаского подгоризонта, так как в промежутке слоя F и верхней границы $C_{II\alpha}$ имеется только несколько слоев сланца. Распространение отдельных слоев промышленной пачки горючих сланцев не равномерное: нижние слои промышленной пачки выклиниваются в западном, восточном и южном направлениях (Х. Беккер 1924, С. С. Бауков 1956). Отдельные сравнительно мощные слои горячего сланца в нижней части кохтлаского подгоризонта распространяются до окрестностей г. Таллин. В южном направлении происходит выклинивание слоев горячего сланца быстрее — уже севернее Чудского озера.

Фауна. Как уже было отмечено, большая часть фауны кукрусеского горизонта появляется в начале кукрусеского времени, но уже в середине кукрусеского горизонта начинается обеднение этой фауны, так как фауна хумалаского подгоризонта ($C_{II\beta}$) состоит почти полностью из реликтов фауны кохтлаского подгоризонта. Виды типовой фауны $C_{II\alpha V}$ даны на стр. 107

Кроме типовой фауны надо, однако, обратить внимание и на

такие виды, которые встречаются редко и только в мезофазии Виру. Эти виды следующие:

Amphilichas aff. hexadactylus (Nieszk.)
Ceratocephala kuckersiana (Schm.)
Hoploichas longispinus (Schm.)
Lichas squamulosus Öpik
L. wimani Öpik
Otarion sp. a Öpik
Proetus bucculatus Öpik
Remopleurides psammius Öpik
Theamataspis illaenoides Öpik
Törnquistia? minuta (Nieszk.)
Actinomena vanadis Öpik
Hesperorthis inostrantzefi ubjaensis Öpik
Kullervo intacta Öpik
Leptaena spumifera Öpik
Philhedra baltica Huene
Pholidops infrasilurica Huene
Vellamo pyramidalis pahlani Öpik
Eotomaria rossica Kok.
Protocrinites fragum (Eichw.)
Melanostrophus fokini Öpik и др.

Хумалаский подгоризонт ($C_{II\beta}$)

Хумалаский подгоризонт составляет верхнюю половину кукуреского горизонта, и охватывает слои от поверхностей размыва на границе $C_{II\alpha}$ и $C_{II\beta}$ до кровли кукуреского горизонта. Название «хумалаский» дано по типичному обнажению в Хумала, западнее г. Таллин, где прослеживается полный разрез подгоризонта.

Мощность хумалаского горизонта колеблется в пределах 3,20—6,16 м. Самая большая мощность $C_{II\beta}$ наблюдается в Восточной Эстонии, меньшая в Юго-западной и Западной Эстонии.

Фаций. В области выхода кукуреского горизонта фаунистические и литологические различия требуют выделения в пределах подгоризонта двух мезофаций. В западной и центральной части выхода, а также южнее от него, распространяется мезофазия Хумала ($C_{II\beta H}$), в Восточной Эстонии и, повидимому, далее на восток распространяется мезофазия Савала ($C_{II\beta S}$) (рис. 4). Кроме этих мезофаций следует, по всей вероятности, выделить еще одну мезофазию в Центральной Эстонии, где, по имеющимся данным глубокого бурения, в хумаласком подгоризонте совсем отсутствует горючий сланец. Но для всестороннего обоснования третьей мезофации достаточный материал пока отсутствует у автора.

Мезофация Хумала (С_{IIβ}H)

Как видно на схеме (рис. 4) мезофация Хумала имеет в Северной Эстонии довольно широкое распространение. В направлении же с севера на юг распространение С_{IIβ}H является более ограниченным, и уже в Центральной Эстонии встречается, повидимому, другая мезофация. Обнажений в области распространения мезофации Хумала имеется немного. Они сосредоточены в районе между полуостровом Палдиски и г. Таллин.

Л и т о л о г и ч е с к и характерно для мезофации Хумала обилие горючего сланца, который, однако, встречается в большинстве случаев в виде тонких комковатых прослоек (мощностью 1—4 см). Прослой горючего сланца переслаиваются с тонкослоистым мергелистым известняком синевато-серого, коричневатого-серого или коричневого цвета. В последнем случае известняк содержит очень много горючего сланца. Прослой его не встречаются равномерно по всему разрезу С_{IIβ}, а сосредоточены отдельными пачками мощностью в 0,2—0,8 м. Кроме того, горючий сланец встречается в хумаласком горизонте еще в виде отдельных слоев мощностью до 10 см (рис. 2)

В разрезах южнее выхода в общем выдерживается литологически характер, описанный выше. В отличие от разрезов в области выхода, встречается больше пиритизированных поверхностей размыва в верхней половине хумалаского горизонта. Кроме того, можно отметить, что в некоторых разрезах глубоких скважин Восточной Эстонии (южнее выхода кукрусеского горизонта) имеются слои горючего сланца с прослоями известняка мощностью до 1,26 м, которые, может быть, получат в будущем промышленное значение.

Ф а у н а мезофации Хумала известна только по материалам из обнажений Западной Эстонии, т. е. если учесть широкое распространение этой мезофации, сравнительно односторонне. Однако можно сказать, что эта фауна состоит из трех компонентов: из видов, существовавших на территории распространения мезофации Хумала уже во время кохтлаского подгоризонта; во вторых, из видов, которые, повидимому, происходят из мезофации Виру кохтлаского подгоризонта (С_{IIaV}); и, в третьих, из видов, которые появились в Западной Эстонии только во время С_{IIβ}. Главную роль в фауне мезофации Хумала играют виды первого компонента, например:

- Chasmops odini* (Eichw.)
- Ch. tallinnensis* Öpik
- Lonchodomas rostratus* (Sars)
- Pterygometopus exilis* (Eichw.)
- Dalmanella navis* Öpik
- Clitambonites squamatus* (Pahl.)
- Cyrtotonella barbara* Öpik

C. kuckersiana kuckersiana (Wys.)
Hesperorthis inostrantzeji (Wys.)
Nicolella sp. n.
Platystrophia dentata (Pand.)
Pseudocrania planissima (Eichw.)
Vellamo rara Öpik
Öpikina dorsata dorsata (Bekk.)
Stellipora revalensis Dyb.
Eccyliomphalus princeps mut. γ Kok.
Hoplocrinus pseudodicyclicus Öpik и др.

Из видов второго компонента (отсутствуют в С_{IIa}Ha) отметим следующие:

Otarion planifrons (Eichw.)
Panarchaeogonus parvus Öpik
Pharostoma nieszkowskii (Schm.)
Remopleurides nanus elongatus Schm.
Estlandia marginata magna Öpik
Vellamo pyramidalis arcuata Öpik
Holopea eichwaldi Kok.
Sinuites rugulosus Kok. и др.

Виды третьего компонента названы уже на стр. 118.

Типичная фауна мезофагии Хумала состоит из следующих видов:

Dalmanella navis Öpik
Cyrtonotella kuckersiana kuckersiana (Wys.)
Estlandia marginata magna Öpik
Hesperorthis inostrantzeji (Wys.)
Leptelloidea musca Öpik
Leptaena crypta Öpik
Platystrophia dentata (Pand.)
P. cf. lynx lynx (Eichw.)
Schizoramma freija (Öpik)
Öpikina dorsata dorsata (Bekk.)
Ceratopsis bicornis Neckaja

Фауна мезофагии Хумала сравнительно беднее фауны мезофагии Харку кохтлаского подгоризонта. Совершенно отсутствуют виды рода *Sowerbyella*, ряд видов *Öpikina*, *Vellamo*, *Poramphonites* и др. брахиоподы. Значительно обеднена фауна гастропод и остракод. Из двадцати трех видов трилобитов, встречающихся в С_{IIa}Ha, существуют в С_{IIβ}H только одиннадцать видов и т. д.

Мезофагия Савала (С_{IIβ}S)

Мезофагия Савала хумалаского подгоризонта распространяется в Восточной Эстонии и, вероятно, продолжается и далее на восток (рис. 4). В области выхода кукуресеского горизонта об-

нажается мезофагия Савала в окрестностях одноименного населенного пункта (на берегах реки Пуртсе) и в сланцевом карьере Кюттейгу. Название дано мезофагии по наилучшему обнажению, откуда собран фаунистический материал.

Литологически для мезофагии Савала в отличие от мезофагии Хумала характерно преобладание известняков и очень незначительное содержание горючего сланца. Последний встречается в виде тонких прослоев мощностью до 4 см. Единственный более мощный слой горючего сланца имеет мощность 12 см. В разрезах преобладающей породой является местами комковатый известняк коричневатого-серого до желтовато-серого цвета (рис. 2). В известняке встречаются в изобилии пиритизированные фрагменты окаменелостей и ходы червей коричневатого цвета.

Фауна. Видовой состав фауны мезофагии Савала очень ограничен, количество встречаемых индивидов (за исключением некоторых видов) невелико. Преобладающая часть фауны состоит из видов, которые в материале представлены лишь немногими экземплярами. Фауна $S_{II}\beta S$ сравнительно однообразна и состоит только из видов, существовавших раньше в $S_{II}aV$. Своеобразие фауны $S_{II}\beta S$ настолько велико, что обосновывает выделение новой мезофагии.

В фауне мезофагии Савала отсутствуют такие встречаемые в мезофагии Хумала виды, как:

Conolichas peri Warburg
Lonchodomas rostratus (Sars)
Otarion planifrons (Eichw.)
Panarchaeogonus parvus Öpik
Cyrtotonella barbara Öpik
Leptaena crypta Öpik
Leptelloidea leptelloides (Bekk.)
Schizoramma freijsa (Öpik)
Vellamo viruana ssp. n.
Hoplocrinus tallinnensis Öpik
Bockia sculpta Heck. и др.

В то же время здесь встречаются виды, которые отсутствуют в мезофагии Хумала, как:

Cybele (Cybelella) coronata Schm.
Iliaenus schmidti Nieszk.
Cliftonia dorsata (His.)
Sowerbyella liliifera Öpik
S. semiluna Öpik
Vellamo simplex Öpik
V. pyramidalis (Pahl.)
Hoplocrinus grewingki Öpik и др.

Типичная фауна мезофации Савала следующая:

Dalmanella navis Öpik
Cyrtonotella kuckersiana kuckersiana (Wys.)
Hesperorthis inostrantzefi (Wys.)
Leptelloidea musca Öpik
Nicolella cf. pogrebovi Alichova
Porambonites aequirostris (Schloth.)
Sowerbyella semiluna Öpik
Echinospaerites aurantium supra Heck.
Hoplocrinus grewingki Öpik.

ЛИТЕРАТУРА

- Алихова, Т. Н. Руководящая фауна брахиопод ордовикских отложений северо-западной части Русской платформы. Труды ВСЕГЕИ. Госгеол-издат, Москва 1953.
- Бауков, С. С. Геотектонические условия сланценакопления. Труды Инст. Геол. Акад. Наук Эст. ССР, вып. I, Таллин 1956.
- Левыкин, В. В. Горючие сланцы Прибалтики. Гос. Научно-Техн. издат. нефтяной и горнотопливой лит., Л.—М. 1947.
- Келлер, Б. М. Типовые разрезы ордовика. Труды Инст. Геол. Наук АН СССР, вып. 154, Геол. серия (№ 65), М. 1954.
- Погребов, Н. Ф. Прибалтийские горючие сланцы. Естеств. произв. силы России. Т. IV Полезные ископаемые, вып. 20. Петроград 1920.
- Рымусокс, А. Биостратиграфическое расчленение ордовика Эстонской ССР. Труды Инстит. Геол. Акад. Наук Эст. ССР вып. I, Таллин 1956.
- Теодорович, Г. И. О выделении фаций разного порядка. Доклады АН СССР, Новая серия, т. LIX, № 9, 1948.
- Bassler, R. S. The Early Paleozoic Bryozoa of the Baltic Provinces. Smiths. Inst. U. S. National Mus. Bull. 77, Washington 1911.
- Bekker, H. The Kuckers Stage of the Ordovician Rocks of NE Estonia. Acta et Comm. Univers. Tartuensis, A II, 1, Tartu 1921.
- Bekker, H. Ajaloolise geoloogia õpperaamat, Tartu 1923.
- Bekker, H. Mõned uued andmed Kukruse lademe stratigraafiaist ja faunast. Acta et Comm. Univ. Tartuensis, A VI, 1, Tartu 1924.
- Jaanusson, V. Über die Stratigraphie der Viru- resp. Chasmops-Serie in Estland. Geol. Fören. Förhandl. B. 67, H. 2, Stockholm 1945.
- Jaanusson, V. Zur Morphologie und Taxonomie der Illaeniden. Arkiv för Mineral. och Geol. B. 1, Nr. 20, Stockholm 1954.
- Kaljo, D., Oraspõld, A., Rõõmusoks, A., Sarv, L., Stumbur, H. Eesti NSV ordoviitsiumi fauna nimestik II. Keskordoviitsium. Loodusuurijate Selts Eesti NSV TA juures. Abiks loodusvaatljale, nr. 25, Tartu 1956.
- Orviku (Jaanson), K. Beiträge zur Kenntnis der Aseri- und der Tallinna-Stufe in Eesti. Acta et Comm. Univ. Tartuensis, A XI, 6, Tartu 1927.
- Orviku, K. Uhaku. Kirde-Eesti karstiaala stratigraafiaist ja geomorfoloogias. Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft bei der Univ. Tartu. 35, 3—4, Tartu 1929.
- Orviku, K. Lithologie der Tallinna-Serie (Ordovizium, Estland) I. Acta et Comm. Univ. Tartuensis, A XXXVI, 1, Tartu 1940.
- Raymond, P. The Correlation of the Ordovician Strata of the Baltic Basin with those of Eastern North America. Bull. Mus. Comp. Zool. Cambridge (Mass. USA), 1916.
- Schmidt, F. Untersuchungen über die silurische Formation von Ehstland, Nord-Livland und Oesel. Arch. für die Naturk. Liv-, Ehst- und Kurlands, I Ser., B. II, Dorpat 1858.

- Schmidt, F. Revision der ostbaltischen silurischen Trilobiten nebst geognostischer Übersicht des ostbaltischen Silurgebiets. Abt. I. Mem. de l'Acad. Imp. des Sciences de St.-Petersbourg, VII Sér., T XXX, Nr. 1, St.-Petersbourg 1881.
- Schmidt, F. On the Silurian (and Cambrian) Strata of the Baltic Provinces of Russia, as compared with those of Scandinavia and the British Isles. Quart. Journ. Geol. Soc., Nr. 152, London 1882.
- Scupin, H. Ostbaltikum I. Algonkium, Paläozoikum und Mesozoikum. Die Kriegsschauplätze 1914—1918 geologisch dargestellt, Heft 9, Berlin 1928.
- Winkler, H. Eestimaa geologia I, Tallinn 1922.
- Öpik, A. Beiträge zur Kenntnis der Kukruse-(C₂-) Stufe in Eesti. I. Acta et Comm. Univ. Tartuensis, A VIII, 5, Tartu 1925.
- Öpik, A. Beiträge zur Kenntnis der Kukruse-(C₂-) Stufe in Eesti. II. Acta et Comm. Univ. Tartuensis, A XII, 3, Tartu 1927.
- Öpik, A. Beiträge zur Kenntnis der Kukruse-(C₂-C₃-) Stufe in Eesti. III. Acta et Comm. Univ. Tartuensis, A XIII, 11, Tartu 1928.
- Öpik, A. Brachiopoda Protremata der estländischen ordovizischen Kukruse-Stufe. Acta et Comm. Univ. Tartuensis, A XVII, 1, Tartu 1930.

KUKRUSE LADEME (C_{II}) STRATIGRAAFIA EESTI NSV-S

Geol.-mineral. tead. kand. A. Rõõmusoks

Geoloogia kateeder

Resümee

Keskordoviitsiumi kuuluv Kukruse lade sisaldab Eesti NSV tähtsaimat maavara — põlevkivi. Põlevkivi tootmise edasine laiendamine nõuab ulatuslike eeluurimistööde teostamist, millede täpsus sõltub uuritavate kihtide stratigraafia tundmise astmest. Kuivõrd senine, peamiselt H. Bekkeri, A. Öpiku ja V Jaanussoni töödele tuginev Kukruse lademe liigestus oli lokaalse iseloomuga ja osalt tegelikkusega vastuolus, tekkis terav vajadus uue stratigraafilise liigestuse järele (joon. 1).

Kukruse lademe alumise piiri moodustab Lääne-Eestis tugev püriidistunud diskontinuiteetpind, Ida-Eestis aga esimese tootsa põlevkivikihi „A” lamav pind. Ülemiseks piiriks on üle terve Põhja-Eesti leviv tugev, kohati mitmekordne diskontinuiteetpind, mis tähistab suurt muutust senises keskordoviitsiumi sedimentatsioonis ja faunas (joon. 2) Kukruse lademe paksus on 6,4—13,5 m (joon. 3).

Kukruse lademe fauna koosneb 343 liigist, kusjuures aga pole arvestatud nautiloide, konulaariaid ja osalt sammalloomi. Põhilise osa Kukruse lademe faunast moodustavad Kukruse lademe alguses ilmunud liigid, kuna teisel kohal on liigid, mis ilmusid juba Uhaku lademe (C_{IIc}) alguses. Kõige rikkalikum fauna eksisteeris Kohtla vöö Viru mesofaatsieses (C_{IIaV}).

Kukruse lade liigestub kaheks vööks: alumiseks, Kohtla vööks (C_{IIa}) ja ülemiseks, Humala vööks (C_{IIβ}). Vöödevaheline piir kujutab endast diskontinuiteetpinda, mis Ida-Eestis asetseb ca 1,3 m viimasest tootmisväärselt põlevkivikihist „H” kõrgemal.

Kohtla vöös eritletakse Lääne- ja Edela-Eestis levivat Harku mesofaatsiest (C_{IIaHa}) ning Ida-Eestis levivat Viru mesofaatsiest (C_{IIaV}) Humala vöös dikteerivad faunistlikud ja litoloogilised erinevused Lääne- ja Kesk-Eestis leviva Humala mesofaatsiese (C_{IIβH}) ning Ida-Eestis leviva Savala mesofaatsiese (C_{IIβS}) eraldamist (joon. 4) Humala vöö sisaldab Ida-Eestis, avamuselt lõuna pool kuni 1,26 m paksusi õhukeste lubjakivi vahekihtidega põlevkivikihte, mis võivad tulevikus osutada tootmisväärsiks.

SELGROO EVOLUTSIOONILISEST MORFOLOOGIAST

Prof., bioloogiatead. dr. J. Piiper

Zoologia kateeder

Võrdleva morfoloogia lähtekohalt esineb selgroo evolutsioonis kolm põhilist omavahel erinevat ja üksteisele järgnevat arenemisfaasi.

Esimest faasi esindab selgroog, millel puuduvad lülিকেhad. Neid asendab hästi arenenud, kogu keha läbiv korda. See selgrootüüp koosneb metameerselt kordat ja seljaaju piiravaist kõhrest kaariste e. arkuaalide paaridest.

Et seda selgrootüüpi tuleb pidada kõige primitiivsemaks, kõige ürgsemaks selgroovormiks, on otstarbekohane nimetada seda arhirahhiu miks¹. Nüüdisaegseist selgroogseist esineb arhirahhium vaid söörsuustel. Tuleb oletada arhirahhiumi laialdast esinemist ka ürgseil selgroogseil — ostrakodermidel ja antiarhidel.

Teist faasi selgroo evolutsioonis esindavad nüüdisaegseist selgroogseist kimäärid (*Holocephali*), kõhrluused (*Chondrostei*) ja kopskalad (*Dipnoi*). Nagu arhirahhiumil, nii püsib ka siin korda kogu eluea. Kui aga arhirahhiumis kaarisid kaarisepaarides on üksteise suhtes vabad, on nad siin ülemisi otsi pidi kas vahetult või erilise vahetüki abil seotud kaarteks, mis ümbritsevad seljaaju ja kordat. Peale ülemiste kaarte esinevad siin tavaliselt ka alumised.

Seda faasi selgroo evolutsioonis nimetame paleorahhiu miks². Peale ülalmainitud nüüdisaegsete selgroogsete esines paleorahhium niihästi paljudel fossiilseil kõhrkaladel (stegoselahhidel, akantoodidel, pleuropterüügidel, ihtüotoomidel) kui ka paljudel fossiilseil luukaladel (paleoniskuseil, püknodontidel jt.).

Kolmanda, kõrgeima evolutsioonifaasina esinevad selgroot, millel korda on sel või teisel määral redutseerunud või puudub hoopis, olles asendunud lülিকেhadega.

Seda faasi selgroo fülogeneesis on otstarbekohane nimetada neorahhiu miks³.

¹ *Arhaios* — ürgne, *rahhis* — selg.

² *Palaios* — vana.

³ *Neos* — uus.

Neorahhium iseloomustab enamikku fossiilseist ja meieaegseist selgroogseist.

Selgroolülide histoloogiline diferentsiatsioon on toimunud selgroo fülogeneesi kestel kahes eri suunas. Esimest suunda esindavad selgrood, mille lülid koosnevad kõhrest, nagu sõõrsuuseil, või lubjastunud kõhrest, nagu hailistel, railistel ja kimääridel. Selgroogu selles kõhreses evolutsioonifaasis tuleb nimetada *kondrorahhiumiks*⁴.

Teist selgroogude histoloogilises evolutsioonis väljakujunenud selgroogude rühma, millel lülid koosnevad kas osaliselt või täiesti luust, on otstarbekohane nimetada *osteorahhiumiks*.

Enamikul nüüdisaegseist selgroogseist teeb osteorahhium ontogeneesis läbi kondrorahhiumi faasi, mil lülid kas tervikuna või osaliselt koosnevad kõhrest, mis hiljem asendub kas osaliselt või täiesti luuga.

Kõik selgroosse puutuvad võrdlev-morfoloogilised andmed räägivad vaate kasuks, et kondrorahhium on selgroo füleetilises evolutsioonis varasemaks, primitiivsemaks arengustaadiumiks, millest hiljem on välja arenenud osteorahhium.

Jälgides paleorahhiumi fülogeneesi lähemalt, selgub, et paleorahhiumi suguvõsaloolises evolutsioonis esineb kaks faasi, millest esimest iseloomustab kondrorahhium, teist osteorahhium.

Nüüdisaegseist selgroogseist püsib paleorahhium kondrorahhiumi faasis kimääridel ja osaliselt ka kõhrluuseil. Fossiilsetest vormidest tuleb oletada kondrorahhiumi faasis olnud paleorahhiumi real fossiilseil varilõpuseil — akantoodidel, stegoselahhidel, ihtüotoomidel ja pleuropterüügidel.

Osteorahhiumi faasis püsib retsentsetest selgroogseist paleorahhium kopskaladel ja osalt ka kõhrluuseil. Väljasurnud vormidest arenes välja osteorahhiumi tüüpi paleorahhium real krossopterüügidel ja ganoiididel.

Nagu paleorahhiumi evolutsioonis, nii võib ka neorahhiumi fülogeneesis täheldada kahte peasuunda. Üks arengusuund on tootnud kondrorahhiumi, nagu see esineb nüüdisaegseil hailistel ja railistel, teine — osteorahhiumi, mis iseloomustab enamikku retsentseid ja fossiilseid luukalu ning kõiki retsentseid ja fossiilseid amfiibe, reptiile, linde ja imetajaid. Sellesse faasi oli arenenud ka *Palaeospondylus*.

Spondülogeneesi, see on lülikeha ja kaare (resp. kaarte) tekke suhtes on neorahhiumi fülogeneetilises evolutsioonis avastatud kolm põhitüüpi ja rida nende põhitüüpide kombinatsioone. Nagu teada, on nendeks spondülogeneetilisteks põhitüüpideks kordogeensed, arkogeensed ja autogeensed lülid, millest kordogeensed iseloomustavad kõhrkalu, arkogeensed ja autogeensed niihästi kõhrkalu kui ka muid neorahhiumiga selgroogseid.

Varemalt mainitud oletus, et neorahhium on arenenud paleo-

⁴ *Hondros* — kõhr.

rahhiumist pärast seda ajavahemikku, kui kalad oma suguvõsaloosis arengus olid diferentseerunud kõhr- ja luukaladeks, põhjendubki sellel täheldusel, et kordogeenseist lülidest selgroog esineb ainult kõhrkaladel.⁵

Autospondüülse lüli evolutsioonis esineb kolm arengusuunda: temnospondüülne, diplospondüülne ja holospondüülne. Temnospondüülse lüli keha koosneb oma arengu kõrgemal astmel tavaliselt kahest ligikaudu kolmekandilisest tükist — eespoolsest hüpotsentrumist ja tagapoolsest pleurotsentrumist. Diplospondüülse lülis on hüpo- ja pleurotsentrum kettakujulised. Temno- ja diplospondüülseks arenes selgroog fossiilsetel mudakalalistel (*Amiiformes*) ja ürgamiibidel (stegokefaalidel).

Temnospondüülseist ja diplospondüülseist lülidest autospondüülseid selgrood on fülogeneetiliselt vanimaid, primitiivsemaid. Hilisemas evolutsioonis ändsid nad alguse holospondüülsele selgroole, mille lülikehad koosnevad ühestainsast tükist.

Holospondüülia areng temno- ja diplospondüüliast on luust neorahhiumi evolutsioonis toimunud kolmes suunas. Esimest suunda esindavad paljud vaapkalad ja luukalad (*Teleostei*), kelle lülikeha on tekkinud hüpo- ja pleurotsentrumi liitumisest (konkrestsentne lüli). Teist suunda esindavad retsentseid amiibiidid. Nende stegokefaalidest põlvnevail eellastel kahanes ja kadus pleurotsentrum, kuna hüpotsentrum suurenes ja kujunes lülikehaks (ekspansioonilüli). Kolmandas suunas toimus holospondüülse selgroo areng hemi- ja diplospondüülsest amniotidel — reptiilidel, lindudel ja imetajail. Siin kidunes ja kadus, peale väheste erandite, hüpotsentrum, kuna pleurotsentrum suurenes ja kujunes lülikehaks (ekspansioonilüli).

Tuleb täheldada, et evolutsiooni käigus on holospondüülse lülikeha tekkes mitmel selgroogsete-rühmal vähemal või suuremal määral osalenud ka kaarised (arkuaalid). Lülikeha on oma füleetilises evolutsioonis kujunenud mitmesugusel määral arkogeenseks (kaarisetekkeseks).

Lülikehadest (e. lülitsentrumitest) koosnevad neorahhiumi osa on otstarbekas nimetada *t s e n t r o r a h h i s e k s*.

Mis puutub selgroo lülide üla- ja alakaari moodustavate kaariste evolutsioonis, siis lubab neid omavate retsentsete ja fossiilsete vormide võrdlev-morfoloogiline analüüs oletada, et paleorahhiumi faasis esines neid igas metameeris vähemalt 4 paari, millest 2 paari olid dorsaalsed ja 2 ventraalsed. Et dorsaalsete kaariste ja kaarte tähtsamaid ülesandeid on seljaaju kaitse, on otstarbekas nimetada nende kogumikku *n e u r o r a h h i s e k s*. Samadel kaalutlustel võime ventraalsete kaariste või kaarte kogumikku,

⁵ Siin tuleb märkida, et india zooloog Ramanujam kirjeldab osalist kordogeensust ka ühel luukalal ja nimelt heeringal. Et ta aga pole kindlaks teinud osteogeensete rakkude rännakut läbi elastika fibroosasse, et seal tekitada luukudet, tuleb oodata uusi sellekohaseid uurimistöid.

mille ülesandeks on veresoonte varjamine, tähistada nimega *h e m o r a h h i s*.

Lõpuks võime rahhioloogilise nomenklatuuri täpsustamiseks hakata kasutama terminit *arkorahhis*, märkides sellega kõikide selgroo kaariste ja kaarte kogumikku. Ülaltoodu alusel on selge, et evolutsiooniteooria seisukohalt on arkorahhis vanem, ürgsem arend kui tsentrarahhis. Arkorahhise suuremat fülogeneetilist vanust tsentrarahhise suhtes tõestab, nagu oleme osaliselt varemgi maininud, ka nüüdisaegsete neorahhiiumiga varustatud selgroogsete loomade embrüoloogiline arenemine. Kõigil selgroogseil peale imetajate tekib arkorahhis varem kui tsentrarahhis. See, et imetajail tuleb lootel tsentrarahhis varem esile kui arkorahhis, on seletatav ta korda rudimentse iseloomuga, võrreldes teiste selgroogsete hästi arenenud lootelise kordaga. Imetajate korda rudimentsust ja sellega seoses tsentrarahhise tekke primaati võrreldes nende arkorahhisega tuleb pidada evolutsiooni lähtekohalt sekundaarseks, tsönogeneetiliseks nähtuseks.

On otstarbekohane nimetada hästi arenenud kordat *m a k r o k o r d a k s* ja rudimentset *m i k r o k o r d a k s*. Makrokorda faasis püsivad sõõrsuused, holokefaalid, kopskalad ja kõhrluused. Selle evolutsioonifaasi elavad läbi ka muude kalade looted ja vastsed ning amfiibide, reptiilide ja lindude looted. Öeldust järgneb, et makrokorda on korda füleetilises evolutsioonis vanemaks arengu- faasiks kui imetajate looteil esinev mikrokorda.

Ühendite suhtes, mis selgroos lülikehasid üksteisega seovad, on selgroo fülogenees toimunud kahes põhisuunas. Esimeses suunas arenenud selgroogudes on ühendid lülide vahel kujunenud umbseteks, liiduselisteks, sünartrrootseteks. Selliselt on nüüdisaegseist selgroogseist lülidevahelised ühendid arenenud kaladel (peale vaaphavi — *Lepidosteus*'e), alamail amfiibidel, mõnel sisalikulisel, krokodillistel ja imetajail. Sesse suunda kuuluvat selgroogu võime nimetada *s ü n a r t r o r a h h i u m i k s*.

Teist lülidevaheliste ühendite evolutsiooni suunda — diartrootilist, liigeselist leiame kaladest vaaphavil, kõrgematel amfiibidel, eriti konnalistel, madudel, enamikul sisalikest ning kaela- ja saba- piirkonnas ka kilpkonnadel ja lindudel. Seda selgroo evolutsiooni suunda võime tähistada nimega *d i a r t r o r a h h i u m*.

Diartrorahhiium võimaldab looma kehale suuremat painduvust kui sünartrorahhiium.

Et sünartrorahhiium iseloomustab enamikku alamaid selgroogseid ja et diartrorahhiium teeb oma ontogeneesis läbi sünartrorahhiumi staadiumi, tuleb sünartrorahhiumi pidada diartrorahhiumist primitiivsemaks.

Evolutsiooniprotsessi põhjustavaks printsiibiks on dialektiline ühtsus struktuuri ja funktsiooni ning organismi ja miljöö vahel. Antud printsiibi kohaselt on kõik selgroo morfoloogilised omadused seletatavad ühelt poolt ta funktsioonidega, see on füsioloogiliselt,

teiselt poolt suhetega miljöö ja organismi vahel, kellele selgroog kuulub, see on ökoloogiliselt.

Füsioloogiliselt on selgroog multifunktsionaalne liitelund. Ta peamiseks funktsiooniks on olla vahetult või kaudselt toeks kõigile organismi moodustavaile osadele, eeskätt koljule, jäsemetele, roietele, kehaseinale ja viimase ning kinnistite kaudu sisikonnale.

Teiseks tähtsaks selgroo funktsiooniks on kaitse. See talitlus on eeskätt seotud arkorahhise mõlema vormiga, millest neurorahhis varjab seljaaju, hemorahhis — veresooni.

Et skelett kui lokomotoorse aparadi passiivne osa on kinnistuspaigaks lokomotoorsele lihastele, on ka selgroog kas vahetult või kaudselt mainitud lihastele kinnistuspaigaks.⁶

Arhirahhiumi faasis on kõik need selgroo funktsioonid ebatäiuslikud, paremini on nad aga välja arenenud paleorahhiumi ja veel paremini neorahhiumi faasis.

Et terrestriline miljöö oma komplitseeritumate ja diferentseeritumate miljööfaktoritega esitab organismile tema ökoloogiliste funktsioonide sooritamiseks suuremaid nõudmisi kui akvatiilne, on selgroog terrestrilistel selgroogsetel arenenud kõrgemale organisatsioonitasemele kui akvatiilseil.

Eluks kontinentaali biotoopides ei osutunud sobivaks ei arhirahhium ega paleorahhium, samuti ka mitte kondrorahhium. Siin on otstarbekamaks osutunud ja kõrgemale organisatsioonitasemele arenenud osteorahhium, neorahhium, diartrorahhium ning osalt ka sünartrorahhium.

Selgroo evolutsioonilise morfoloogia viljelemisel tuleb rakendada ajaloolist meetodit, silmas pidades dialektilise materialismi vastandite võitluse ja ühtsuse printsibiis sisalduvat sisu ja vormi ühtsust.

Selgroo evolutsiooni sisuks on ta evolutsiooni põhjustavad faktorid. Nendeks on selgroo struktuuri ja funktsiooni ühtsus ning selgroogu omava organismi ja miljöö ühtsus.

Selgroo evolutsiooni vormiks on tema ja teda omava organismi morfofüsioloogiline organisatsioon.

Kokkuvõte

1. Arhirahhium on selgroo algfaas, paleorahhium hilisem ja neorahhium uusim faas.

2. Kondrorahhium on fülogeneesi primitiivsem, osteorahhium — kõrgem arengufaas.

3. Neo- ja osteorahhiumi füsioloogilised ja ökoloogilised funktsioonid on intensiivsemad kui arhi-, paleo- ja kondrorahhiumil.

⁶ Peale mainitud üldfunktsioonide võib selgroog omada veel mõningaid erifunktsioone.

4. Arhi-, paleo- ja kondrorahhiimi faasis püsivad sõõrsuused ja primitiivsemad kalad. Kõrgemad kalad ja neljajalgised on arenenud neo- ja osteorahhiimi faasidesse.

5. Arkorahhise kummastki vormist on neurorahhis oletatavasti fülogeneetiliselt vanem kui hemorahhis.

6. Sünartrorahhium esineb primitiivsema evolutsioonifaasina kui diartrorahhium.

7 Ihtüopsiidide ja sauropsiidide loodete makrokorda on fülogeneetiliselt ürgsem kui imetajate loodete mikrokorda.

ОБ ЭВОЛЮЦИОННОЙ МОРФОЛОГИИ ПОЗВОНОЧНИКА

Проф., докт. биол. наук И. Пийпер

Кафедра зоологии

Резюме

В эволюции позвоночника различают три главных фазы.

1. Фаза архирахиума. Хорда сохраняется целиком. Позвоночник состоит из расположенных по бокам хорды и упирающихся на хорду метамерных пар хрящевых палочек. Представлена у круглоротых и, по всей вероятности, у панцирных рыб (*Ostracodermi*, *Antiarchi*).

2. Фаза палеорахиума. Хорда сохраняется целиком. Позвоночник состоит из окружающих хорду метамерно расположенных верхних и нижних хрящевых или костных дуг. Представлена у химеровых, костнохрящевых, двоякодышащих и у некоторых вымерших форм как из хрящевых так и костных рыб.

3. Фаза неорахиума. Хорда в той или другой степени редуцирована или отсутствует (у взрослого). Имеются в той или другой степени развитые тела позвонков — хрящевые или костные. Имеются верхние и часто также нижние дуги — хрящевые и костные. Представлена у большинства рыб и у четвероногих животных.

4. Фаза хондрорахиума или хрящевого позвоночника, филогенетически примитивнее фазы остеорахиума или костного позвоночника.

5. Аркорахис или часть неорахиума, состоящая из дуг, является с точки зрения эволюции более примитивной частью позвоночника, чем состоящая из тел позвонков — центрорахис.

6. Из обеих форм аркорахиса состоящий из верхних дуг неврорахис филогенетически древнее состоящего из нижних дуг геморахиса.

7. Фаза синартрорахиума, где связи между позвонками плотные, примитивнее фазы диартрорахиума, где эти связи сочленовые.

8. Крупная макрохорда у зародышей ихтиопсид и сауропсид является более примитивной фазой в эволюции позвоночника, чем рудиментарная хорда — микрохорда млекопитающих.

О МОРФОЛОГИИ И ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ ПОСТЭМБРИОНАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ КОСТНОГО ПОЗВОНОЧНИКА У ОКУНЯ (*PERCA FLUVIATILIS* L.)

Проф., докт. биол. наук И. Пийпер
Кафедра зоологии

Материал для данной работы был получен из озера Пейпси * в Эстонской ССР

Для исследования позвоночники были освобождены от мягких частей путем мацерации в горячей воде.

Для сохранения цельности разъединенного на отдельные позвонки позвоночника через него были проведены две тонкие проволоки. Одна из них проходила через позвоночный канал, а другая, ей параллельная, через середины тел позвонков.

Приготовленные таким способом препараты оказались вполне удобными как для изучения отдельных позвонков, так и для анализа позвоночника как целого.

Выражаю мою искреннюю благодарность аспиранту Ю. Ристкоку за помощь, оказанную при получении материала исследования.

Позвонок костистой рыбы состоит, как показывает его эмбриологическое развитие, из автогенной части, которая формируется из соединительной ткани, и из аркогенной части, которая развивается из хряща.

В автогенной части тела позвонка можно различить два отдела — внутренний и наружный.

Внутренний отдел автогенной части тела позвонка, который мы называем коногенным отделом, состоит из двух сросшихся вершинами конусов — переднеконуса и заднеконуса, образующими биконус.

Конусы состоят из очень плотной костной ткани, дифференцированной на более темные и более светлые слои. Так как ежегодно к существующим слоям прибавляется по одному светлому и одному темному слою, то по их счету можно определить возраст рыбы.

Наружный отдел тела позвонка, который мы называем перигенным отделом, представлен у костистых рыб несколькими

* Чудское озеро.

морфологическими типами. Из этих типов наиболее обыкновенными являются два типа, которые мы называем трабекулярными и ламинарными типами.

В случае трабекулярного типа наружный, перигенный отдел тела позвонка состоит из отчасти рыхло, отчасти плотно скученных продольных костных трабекул, тянущихся от переднеконуса к заднеконусу, заполняя углубление между ними.

При ламинарном типе перигенная часть тела позвонка представлена парными, разной толщины пластинками, которые идут в продольном направлении от переднеконуса к заднеконусу. Пла-

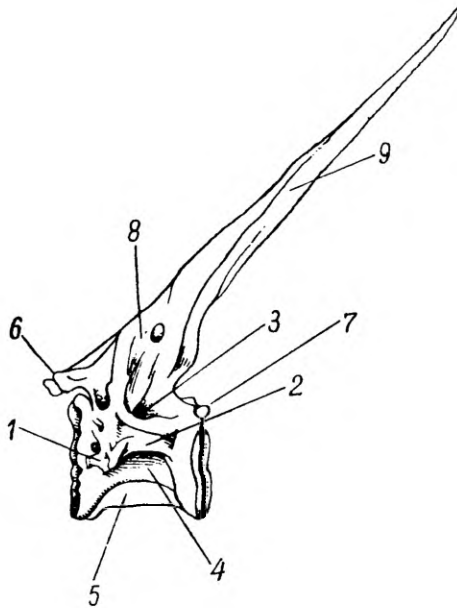


Рис. 1. Позвонки из прекаудального отдела. 1 — поперечный отросток (*basapophysis*); 2 — поперечная пластинка (*lamina transversalis*); 3 — надпоперечная яма (*fossa supratransversalis*); 4 — подпоперечная яма (*fossa subtransversalis*); 5 — брюшная пластинка (*lamina ventralis*); 6 — передний верхний сочленовный отросток (*praezygapophysis*); 7 — задний верхний сочленовный отросток (*postzygapophysis*); 8 — верхняя дуга (*arcus superior*); 9 — верхний остистый отросток (*processus spinosus superior*).

стинки (*laminae*) отделены друг от друга более или менее четко выраженными углублениями — ямами (*fossae*).

У окуня как в каудальной, так и в прекаудальной части позвоночника три пары продольных пластинок, из которых одна пара расположена на спинной, другая на брюшной стороне биконоуса, а третья пара расположена по его бокам (рис. 1, 2, 3).

Верхнюю пару мы называем спинными пластинками — *laminae dorsales*, нижнюю — брюшными пластинками — *laminae ventrales*. Что же касается боковых пластинок, то в виду того, что они в прекаудальной части позвоночника представлены базальными частями поперечных отростков или базопофиз, их целесообразно именовать поперечными пластинками — *laminae transversales*. Для соответ-

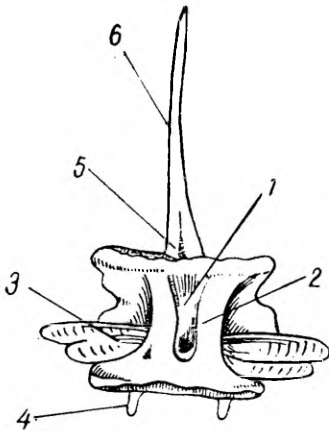


Рис. 2. Позвонок из прекаудального отдела с брюшной стороны. 1 — брюшная яма (*fossa ventralis*); 2 — брюшная пластинка (*lamina ventralis*); 3 — поперечный отросток (*basapophysis*); 4 — верхний задний сочленовный отросток (*postzygapophysis*); 5 — верхняя дуга (*arcus superior*); 6 — верхний остистый отросток (*processus spinosus superior*).

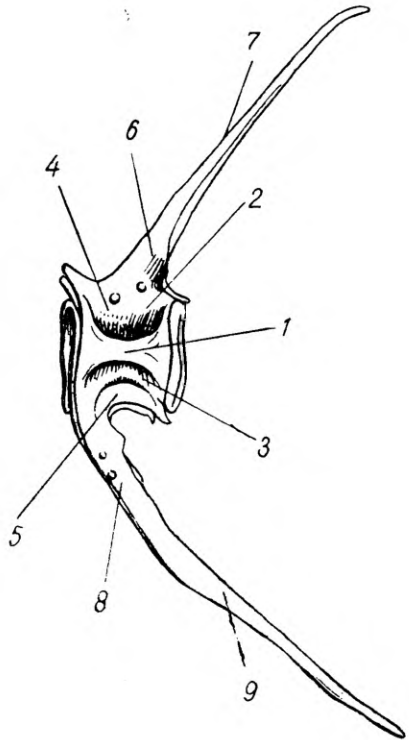


Рис. 3. Позвонок из каудального отдела. 1 — боковая пластинка (*lamina lateralis*); 2 — спинная пластинка (*lamina dorsalis*); 3 — подпластиночная яма (*fossa sublaminaris*); 4 — надпластиночная яма (*fossa supralaminaris*); 5 — брюшная пластинка (*lamina ventralis*); 6 — верхняя дуга (*arcus superior*); 7 — верхний остистый отросток (*processus spinosus superior*); 8 — нижняя дуга — (*arcus inferior*); 9 — нижний остистый отросток (*processus spinosus inferior*).

ствующих пластинок каудальной области позвоночника мы сохраняем название боковые пластинки — *laminae laterales*.

Верхние пластинки являются базальными частями верхних

дуг, а нижние пластинки — таковыми же частями нижних дуг в каудальной части позвоночника, где эти дуги только и развиты.

В каудальной части позвоночника каждый позвонок имеет справа и слева по две ямы, отделенных друг от друга боковой пластинкой (*lamina lateralis*) Верхнюю из этих ям мы именуем надпластиночной ямой — *fossa supralaminaris*, нижнюю подпластиночной ямой — *fossa sublaminaris*. Углубления, заключенные между верхними пластинками, должны быть названы спинными ямами — *fossae dorsales*, а углубления между нижними пластинками — брюшными ямами — *fossae ventrales* (рис. 1, 3).

Верхние дуги позвонков 1—4 в боковом аспекте имеют вид массивных, неправильно-треугольных образований. Начиная с 5-го позвонка до 10-го верхние дуги с хорошо развитыми остистыми отростками становятся постепенно тоньше и выше, сохраняя эту форму почти до конца каудальной области.

Остистые отростки от 2-го до 4-го позвонков являются сравнительно короткими, в краниальном аспекте коническими. Начиная от 5-го позвонка до конца позвоночника они длиннее предыдущих, слегка согнуты и обращены вогнутой стороной назад. Только у последних предуростильных позвонков остистые отростки являются сравнительно более толстыми, чем их предшественники.

Передние нижние дуги длиннее соответствующих верхних дуг. Они получают свое начало от передней части вентральных пластинок, а не от их средней части, как это имеет место у верхних дуг. Позвоночные отверстия нижних дуг выше таковых верхних дуг.

Нижние дуги первых трех каудальных позвонков оканчиваются тремя отростками, из которых средняя, наиболее длинная, соответствует остистому отростку, а боковые — ребрам, сросшимся с нижней дугой.

Нижние дуги предуростильных позвонков сильнее прочих.

Уростиль снабжен 5-ю нижними дугами — гипуралиями, из которых часть палочковидные, часть — пластинчатые.

Первые четыре позвонка лишены поперечных отростков, а у 5-го позвонка они рудиментарны и отходят от спинно-боковой части переднего конца позвонка. У 6-го позвонка они уже лучше образованы и сидят по бокам переднего конца тела позвонка. Начиная от 6-го позвонка до конца предхвостовой части позвоночника поперечные отростки постепенно удлиняются, так что у последнего позвонка данного отдела они почти в два раза длиннее, чем у 12-го позвонка.

В дорзальном аспекте поперечные отростки имеют удлиненно-треугольную форму. Они представляют из себя вогнутую пластинку, выпуклая сторона которой обращена назад. Совпадающая с продольной осью поперечного отростка вогнутость делит его на кранио-вентральную пластинчатую и дорзо-каудальную палочковидную часть.

С 5-го по 10-й позвонок длинная ось поперечного отростка

имеет направление вертикальное к длинной оси позвоночника, между тем как у позвонков с 10 по 15 их дистальные концы постепенно поворачиваются назад.

Передние верхние сочленовные отростки крупнее всех остальных. У первых четырех позвонков они имеют форму коротких, широких, пирамидальных образований, расположенных на спиннобоковой стороне переднего конца тела позвонка.

Они расположены по отношению к их величине в убывающем порядке. Начиная с 5-го позвонка и вплоть до конца хвостового отдела размеры их оказываются постоянными. Форма же их в первой половине этого отдела тупопалочковидная, а в задней половине низкокonusовидная.

Из задних верхних сочленовных отростков первый является очень крупным, имеет пирамидальную форму и расположен на дорзолатеральной части заднего конца тела позвонка, вдаваясь далеко назад. У 2-го позвонка они уже значительно меньших размеров, а у 3-го и 4-го позвонка они сравнительно очень маленькие. Начиная с 5-го позвонка до средней части каудального отдела позвонка они рудиментарны, а в заднем отделе каудального отдела отсутствуют.

Нижние сочленовные отростки развиты только в каудальном отделе позвоночника. Передние нижние сочленовные отростки развиты в виде маленьких конических образований только в задней части каудального отдела позвоночника.

Задние нижние сочленовные отростки представлены маленькими острями, расположенными на задних углах вентральных пластинок.

Возникает вопрос, является ли вышеописанная морфологическая структура костного позвоночника взрослого окуня результатом ряда качественных изменений, или же структура эта залагается, как таковая, уже в первых, ранних стадиях его развития.

Для выяснения этого вопроса был исследован ряд стадий развития костного позвоночника у молодых окуней различного возраста.

Всего было исследовано 13 стадий, начиная от молодежи в 5 см, до рыб длиной в 24 см. Из этих исследований видно, что внутренняя биконическая часть костного позвонка или биконуса представлена в такой форме, как у взрослого, уже и у молодежи длиной в 5 см, не считая различий в величине биконуса и в количестве составляющих его годичных слоев.

Сравнительно-морфологический анализ показывает, что биконус позвонка в процессе развития, кроме количественных изменений, то-есть роста, не подвергается никаким существенным изменениям.

Что же касается периконической части позвонка, т. е. той его части, которая покрывает его биконус, то и она не обнаруживает значительных качественных изменений её структуры сравнительно с таковой у взрослой формы.

Дорзальные пластинки, которые являются базальной частью верхних дуг, а также и находящиеся на нижней стороне позвонков каудального отдела вентральные пластинки, в отчетливо выраженной форме развиты уже у молодежи длиной в 5 см.

Расположенные по бокам биконуса боковые пластинки намечаются у молодежи в 5 см более или менее ясно только в задней части каудального отдела позвоночника. Поперечные пластинки средней и передней частей позвоночника мало развиты или совершенно отсутствуют.

Но уже у молодого окуня длиной в 8 см боковые пластинки развиты на протяжении всего каудального отдела позвоночника. Они состоят здесь, как и у взрослого окуня, преимущественно из двух параллельно протянувшихся трабекул, имеющих в задней части каудальной области позвоночника тенденцию сливаться в одну цельную, не дифференцированную на части боковую пластинку.

Над- и подпластиночные ямы, которые у молодежи окуня в 5 см рудиментарны или отсутствуют вовсе, у молодого окуня в 8 см выражены со всей ясностью.

Что же касается верхних и нижних дуг и поперечных отростков, то и они развиты уже у молодежи окуня в 5 см. Они представлены у него как по форме, так и по пропорциям по отношению к телу позвонка в общих чертах такими же, как у взрослого окуня.

То же наблюдается по отношению к верхним и нижним остистым отросткам.

Для выяснения соотношений между скоростями роста прекаудального и каудального отдела позвоночника на разных стадиях развития костного позвонка окуня, а также для определения того же соотношения между высотой и длиной позвоночника, произведены соответственные измерения, на основе которых составлены нижеследующие таблицы.

Первая таблица показывает соотношение скоростей роста позвоночника, как целого, так и его прекаудального отдела. Это соотношение колеблется между 2,3 и 2,1. Разница — 0,2 незначительна и может быть объяснена индивидуальными отклонениями в росте особей одинакового возраста, а также и тем, что взятые для анализа особи относятся к разным популяциям.

Вторая таблица изображает соотношение между скоростями роста позвоночника, как целого, так и его каудального отдела. Это соотношение колеблется между 1,9 и 1,7. Разница — 0,2 незначительна и обуславливается теми же причинами, как и в предыдущем случае.

Третья таблица показывает взаимоотношение темпов роста прекаудального и каудального отдела. Амплитуда этого соотношения $1,3 - 1,1 = 0,2$. Она незначительна и достаточно объясняется теми же обстоятельствами, как и в первом и втором случаях.

Четвертая таблица иллюстрирует соотношение между скоростями роста костного позвоночника в длину и высоту. Это соотно-

шение колеблется в пределе $1,0 - 0,9 = 0,1$. Эта амплитуда колебания также незначительна и объясняется теми же причинами, как и в предыдущих случаях.

Сравнительная оценка этих таблиц показывает, что соотношение между скоростями роста прекаудального и каудального отдела позвоночника на разных стадиях развития костного позвоночника окуня является величиной постоянной. То же самое следует из сравнения длины и максимальной высоты развивающегося костного позвоночника у окуня.

Основные выводы

Найдено:

1) что относительные размеры отделов развивающегося позвоночника во всех исследованных стадиях являются почти постоянными и

2) что макроструктура позвонков в такой форме, как она сформирована у взрослого окуня, вполне представлена уже у молодого 8-ми см окуня.

Т а б л и ц а 1

Общая длина рыбы L в см	Длина позвоночного столба в см	Длина прекаудального отдела в см	Отношение длины позвоночника к длине прекаудального отдела
7	4,2	1,9	2,2
8	5,0	2,3	2,2
10	6,0	2,6	2,3
11,5	6,8	2,9	2,3
12	7,4	3,4	2,2
13	8,1	3,9	2,1
15	9,9	4,6	2,2
16	10,3	4,8	2,1
18,5	12,1	5,6	2,2
20	13,0	6,3	2,1
22	14,2	6,8	2,1
24	15,6	7,6	2,1

Таблица 2

Общая длина рыбы L в см	Длина позвоночного столба в см	Длина каудального отдела в см	Отношение длины позвоночника к длине каудального отдела
7	4,2	2,3	1,8
8	5,0	2,8	1,8
10	6,0	3,8	1,4
11,5	6,8	4,0	1,7
12	7,4	4,1	1,8
13	8,1	4,2	1,9
15	9,9	5,3	1,9
16	10,3	5,7	1,8
18,5	12,1	6,5	1,9
20	13,0	6,7	1,9
22	14,2	7,4	1,9
24	15,6	8,0	1,9

Таблица 3

Общая длина рыбы L в см	Длина каудального отдела в см	Длина прекаудального отдела в см	Отношение длины каудальн. отдела к длине прекаудального отдела
7	2,3	1,9	1,2
8	2,8	2,3	1,2
10	3,4	2,6	1,3
11,5	4,0	2,9	1,3
12	4,1	3,4	1,2
13	4,2	3,9	1,1
15	5,3	4,6	1,2
16	5,7	4,8	1,2

Общая длина рыбы L в см	Длина каудального отдела в см	Длина прекаудального отдела в см	Отношение длины каудальн. отдела к длине прекаудального отдела
18,5	6,5	5,6	1,2
20	6,7	6,3	1,1
22	7,4	6,8	1,1
24	8,0	7,6	1,1

Таблица 4

Общая длина рыбы L в см	Длина позвоночного столба в см	Высота верхней половины первого прекаудального позвонка в мм	Отношение длины позвончика к высоте*) верхней половины первого прекаудальн. позвонка
7	4,2	4,0	1,0
8	5,0	5,0	1,0
10	6,0	6,5	0,9
11,5	6,8	7,0	1,0
12	7,4	7,5	0,9
13	8,1	8,0	1,0
15	9,9	10,0	1,0
16	10,3	11,5	0,9
18,5	12,1	13,0	0,9
20	13,0	13,5	1,0
22	14,2	15,0	0,9
24	15,6	17,0	0,9

* Высота измерена от боковой пластинки (lamina lateralis) до конца остистого отростка.

AHVENA (*PERCA FLUVIATALIS* L.) LUUST SELGROO MORFOLOOGIAST JA SELLE POSTEMBRÜONAALSE ARENEMISE SEADUSPÄRASUSTEST

Prof., biol. tead. dr. J. Piiper

Zoologia kateeder

R e s ü m e e

Materjal käesolevaks tööks hangiti Peipsi järvest ja prepareeriti uurimiseks matsratsiooni teel. Et vältida lülide kadu ja alal hoida nende normaalset järjestust, aeti selgroost läbi kaks peent traati, millest üks läbis selgrookanali, teine lülikehad.

Lülikeha koosneb sisemisest *konogeen*sest ja välimisest *perigeen*sest osast. Konogeenne osa esineb kahe tippupidi liitunud õõnsa koonusena. Perigeense osa moodustavad õhemad või paksemad *lestmed* (*lamellae*), mis kulgevad koonusest koonuseni.

Enamik ahvena lülidest on varustatud kolme lestmepaariga — dorsaalse, lateraalse ja ventraalsega (*laminae dorsales, laterales* ja *ventrales*) (joon. 1, 2, 3).

Dorsaalsed ja kaudaalse regiooni ventraalsed lestmehed on õhukesed ja nendest algavad ala- ja ülakaared, kuna lateraalsed ja prekaudaalse regiooni ventraalsed lestmehed on paksemad.

Lestmeid eraldavad üksteisest dorsaalsed, ventraalsed ja lateraalsed *augud* (*fossae*). Lateraalseid auke on lüli kummalgi küljel kaks — ülemine ja alumine. Kaudaalses regioonis eraldab lestmehelist auku (*fossa supralaminaris*) lestmehelülist *august* (*fossa sublaminaris*) külgmehelülist leste. Et prekaudaalse regiooni külgmehelülist lestmehelülist algavad ristijätked (*basapofüüsid*), on otstarbekohane nimetada neid *ristilestmehelülist* (*laminae transversales*).

Prekaudaalse regiooni eespoolsemate lülide ülakaartel on külgspektis irregulaarne piklik püramiidjas haabitus jämedate ogajätketega. Nendest tagapool kujunevad lülide ülakaarte ogajätked üha pikemaks ja peenemaks, püsid selistena kaudaalse regiooni tagaosani.

Kaudaalse regiooni eespoolsemad alakaared on nendega koha-

kuti asetsevaist ülakaartest märgatavalt pikemad. Nendest lõpevad kolm eespoolsemat kolme haruga, millest keskmine on ogajätke, külgmised aga kaarega liitunud roided. Hüpuraalid (arvult 5) on osalt kepjad, osalt liistakjad.

Alles alates kuuendast lülist on ristijätked paremini arenenud, paiknedes lülikeha eesosa külgedel. Olles algul lühemad, pikenevad nad kaudaalselt, nõnda et viimane prekaudaalse regiooni ristijätke on ligi kaks korda pikem kui 12-nda lüli oma. Ristijätkeil on dorsaalaspektis pikliku, kolmnurkse, ülalt lohus lestme laad. Kuna eespoolseil ristijätkeil on selgroo pikitelje suhtes vertikaalne suund, omavad tagapoolsemate distaalsed otsad kaudaalsema suuna.

Prekaudaalse regiooni eesmised ja tagumised ülemised liigesjätked on püramiidja haabitusega ja ületavad suuruselt kõik teised.

Alumised liigesjätked, nii eesmised kui ka tagumised, esinevad vaid kaudaalses regioonis.

Et selgitada ahvena luust selgroo ontogeneesi, uuriti läbi rida noorkalu pikkusega (L) 5—24 cm. Selgus, et juba 5-sentimeetrilisel noorkalal esineb lülikeha luustunud konogeenne osa, luustunud dorsaalsed ja ventraalsed lestmed ühes üla- ja alakaartega ning ristijätked. Lateraalsed lülikeha lestmed aga on enam-vähem märgatavalt arenenud vaid kaudaalses regioonis.

8-sentimeetrilisel noorkalal esinevad ka lateraalsed lestmed ja ühes nendega lestmeülised ja lestmealused augud, mis 5-sentimeetrilisel noorkalal kas puudusid või olid rudimentsed.

Et selgitada suhteid prekaudaalse ja kaudaalse regiooni kasvu kiiruse kohta ahvena luust selgroo arenemise eri staadiumidel ning suhteid areneva selgroo pikkus- ja kõrguskasvu vahel, teostati rida asjaomaseid mõõtmisi. Mõõtmistest saadud arvude tabeleist selgub, et areneva ahvena luust selgroo kaudaalse ja prekaudaalse regiooni suhteline pikkus on peaaegu konstantne. Sama maksab ka suhte kohta areneva selgroo pikkuse ja kõrguse vahel.

EESTI NSV MAGEVEELISTEST VABATELAVATEST AERJALALISTEST

Aspirant I. Veldre
Zooloogia kateeder

Senini trükkis avaldatud andmete järgi (R. Voore, 1933—1937; H. Riikoja, 1955) on Eesti NSV magevetest leitud vabalt elavate aerjalaliste (*Eucopepoda*) liikide arv¹ alamseltside kaupa järgmine: hormikulisi (*Calanoida*) — 7 liiki, sõudikulisi (*Cyclopoida*) — 20 liiki, rullikulisi (*Harpacticoida*) — 3 liiki.

Paari viimase aastakümne jooksul on kogunenud uut materjali meie mageveeliste aerjalaliste kohta. H. Riikoja poolt 1944. a. koostatud käsikiri planktonorganismide esinemise kohta Eesti järvedes sisaldab rea originaalseid andmeid meie siseveekogude aerjalaliste kohta. Üsna ulatuslik on Eesti NSV siseveekogude kalamajanduslikul uurimisel 1951.—1954. a. kogutud zooplanktonoloogiline materjal, mis aerjalaliste osas on läbi töötatud H. Veldre (1951.—1953. a.) ja A. Mäemetsa (1954. a.) poolt. Väiksemates veekogudes — lompides, rabalaugetes ja mujal elutsevaid aerjalalisi on uurinud artikli koostaja ja A. Mäemets. Nende uurimiste tulemusena on Eesti NSV magevetest leitud aerjalaliste liikide arv järgmine: hormikulisi 8, sõudikulisi 34, rullikulisi 1²

Olemasolev materjal võimaldab teha mõningaid kokkuvõtteid meie mageveeliste aerjalaliste esinemise kohta mitmesugustes veekogudes³. Andmed hormikuliste (*Calanoida*) ja sõudikuliste (*Cyclopoida*) kohta on tunduvalt täielikumad kui rullikuliste (*Harpacticoida*) kohta. Mõningaks takistuseks viimaste tundmaõppimisel on kahtlemata olnud väikesemõõtmeliste rullikuliste

¹ Arvesse ei ole võetud ranniku veekogudes (riimvees) esinevaid aerjalalisi (näiteks *Eurytemora velox*).

² Möödunud aastal leiti Eesti NSV alalt veel järgmised liigid: *Paracyclops poppei* (Rehb.), *Elaphoidella gracilis* (G. O. Sars) ja *Parastenocaris brevipes* Kessl. (A. Mäemets ja I. Veldre. Eesti NSV vabatelevad aerjalalised [*Eucopepoda*] I. Tartu, 1956).

³ Suhteliselt vähe on uuritud meie jõgedes elavaid aerjalalisi. Faunistilise uurimistöö seisukohalt on see õigustatud kaalutlusega, et jõgede planktonis esinevad aerjalalised satuvad vooluvette seisuveekogudest ja et kõik jõgede kaldataimestikus elutsevad aerjalalised esinevad ka järvede litoraalis ning väiksemates veekogudes.

määramine, kuid peamiseks põhjuseks on asjaolu, et plankton-organismide kogumisel peamise püügivahendina kasutatud Apsteini võrk ei filtreeri veekogu põhjalähedasi kihte. Veekogude põhjalähedastes kihtides elutsevate liikide — rullikuliste (*Harpacticoida*), aga ka planktobentiliste sõudikuliste (*Cyclopoida*) leviku selgitamiseks tuleks kasutada erilisi meetodeid — põhjamuda läbi vaatamist binokulaari all, noorkalade ja planktontoiduliste kalade sooltorude sisu analüüsimist jne. Nende võtete rakendamine võimaldaks kõrvaldada meie planktobentiliste aerjalaliste uurimises olevad lüngad.

Allpool on esitatud andmed seni Eesti NSV magevetest leitud vabaltelavate aerjalaliste liikide ja varieteetide⁴ leviku kohta. Sagedamini esinevate liikide puhul on nimetatud veekogude tüübid, millistes liik elutseb. Konkreetset leiuandmed on toodud vähestest leiukohtadest leitud liikide ja perekond *Cyclops* liikide puhul.

Perekond *Cyclops* liikide konkreetsete leiukohtade esitamine on vajalik, kuna nimetuse all *Cyclops strenuus* s. lat. on varasemad autorid kirjeldanud tervet liikide rühma, mida praegu käsitletakse perekonna *Cyclops* s. str. liikidena. Lompides esineb koos *Cyclops strenuus*'iga liik *Cyclops furcifer* Seega osa varasemaid *C. strenuus*'i leide tähistab ka *C. furcifer*'i. *Cyclops strenuus*'i leiud järvede avaveest võivad ainult erandjuhtudel tähistada liiki *Cyclops strenuus* s. str., sest Rõlovi (1948) järgi ei esine seda liiki järvede pelagiaalis. Missuguste liikidega autoritel on tegemist olnud, on raske otsustada. Suvekuudel võisid need olla *Cyclops scutifer*, *Cyclops lacustris* ja *Cyclops abyssorum*, kes esinevad suvekuudel meie järvede pelagiaalis. Talvekuudel on *C. strenuus*'i nime all kirjeldatud arvatavasti liiki *Cyclops kolensis*.

Liigid, millele leiud Eesti NSV ala kohta tulevad esmakordselt avaldamisele, on märgitud tärnikestega.

Autoritele viitamiseks on alljärgnevas tekstis kasutatud järgmisi lühendeid:

- S. — Samsonov, N.
- A. — Audova, A.
- R. — Riikoja, H.
- V — Voore, R.
- H. V — Veldre, H.
- M. — Mäemets, A.
- I. V — Veldre, I.

Siinkohal avaldan tänu kõigile isikutele, kelle andmeid käesolevas artiklis on kasutatud.

***Calanoida* — hormikulised**

1. *Hemidiaptomus amblyodon* (Marenz.) — hiidaerik. Lisaks vanadele leidudele (V.) Tammemõisa tiigist Tartus ja Neeruti

⁴ Taksonoomiliste ühikute käsitlemisel on aluseks võetud V. M. Rõlovi (1935, 1948) ja E. V Borutski (1952) töödes esitatud süsteem.

Linnamäe lähedast linaleost (Tapa raj.) on liiki leitud Kodijärve lähedalt (Elva raj.) suvel ärakuivavast lombist (12. VI 1955., I. V.) ja Navalt (Jõgeva raj.) samuti ajutisest kevadisest veekogust (30. V 1955, M.) Viimasest leiukohast võetud proov on saadud üliõpilaselt T. T i m m i l t.

2. *Acanthodiptomus denticornis* (Wierz.) — ogaerik. Antud liiki oli senini leitud rabalaugastest Jussi Suurjärvedest kagus ja Ännijärve juurest Loksa raj. (V.) 1955. a. suvel esines ogaerik Palasi raba järvedes (laugastes) — Vanamatsi järves, Kõrtsi järves ja Suurlaukas Rapla raj. (21. VII 1955, I. V.)

* 3. *Eudiaptomus coeruleus* (Fich.) — tiigi-pärisaerik. Tiigi-pärisaeriku ainukeseks leiukohaks Eesti NSV-s on turbaaugud Emajõe luhal Tartu ujula läheduses (11. X 1954 ja 24. X 1955, I. V.).

4. *Eudiaptomus graciloides* (Lillj.) — sale pärisaerik. Liik on iseloomulik järvede pelagiaalile. 1951.—1953. a. järvede ekspeditsiooni poolt läbiuuritud 93-st järvest esines sale pärisaerik 52-s (H. V.). Peale järvede on liiki leitud lompidest.

5. *Eudiaptomus gracilis* (G. O. Sars) — järve-pärisaerik. Liik esineb peamiselt järvede pelagiaalis, harvemini väiksemates veekogudes. 1951.—1953. a. järvede ekspeditsiooni poolt läbiuuritud 93-st järvest leiti järve pärisaerikut 40-st (H. V.). Antud liik on eelmise liigi suhtes vikareeriv, koos esinevad nad ainult mõnedes vabariigi sügavamates järvedes. Arvatavasti esineb erinevus mõlema liigi vertikaalses levikus (H. V.)

6. *Eurytemora lacustris* (Poppe) — järve-ahaskoodik. Esineb Vagula järves (V., H. V.) ja Saadjärves (R., H. V.).

7. *Heterocope saliens* (Lillj.) — raba-jämekoodik. Lisaks varasemale leiule rabalaugastest Jussi Suurjärve juures Loksa raj. (V.) on raba jämekoodikut leitud Ohepalu järvest Tapa raj. (21. VII 1953, H. V.), rabalaugastest Loosalu järve juures (19. ja 23. VII 1955), Palasi järvedest ja nende lähedal asetsevatest rabalaugastest Rapla raj. (21. VII 1955, I. V.).

8. *Heterocope appendiculata* G. O. Sars — järve-jämekoodik. Liiki on Eesti NSV-s leitud järvedest, peamiselt pelagiaalist. 1951.—1953. a. järvede ekspeditsiooni poolt läbiuuritud 93-st järvest leiti järve jämekoodikut 23-s järves (H. V.)

Cyclopoida — sõudikulised

9. *Macrocylops fuscus* (Jur.) — lühihark-hiidsõudik. Liiki on leitud järvede litoraalist ja turbaaukudest, kusjuures ta ei ole nii sage kui *Macrocylops albidus*.

10. *Macrocylops distinctus* (Rich.) — keskmine hiidsõudik. Eesti NSV-st ainult üks leid — turbaaugust Tähtvere raba serval (10. VI 1934, V.).

11. *Macrocylops albidus* (Jur.) — tavaline hiidsõudik. Kõige

sagedamini esinev hiidsõudik, keda on leitud järvede litoraalist, turbaaukudest, aga ka laugastest.

12. *Eucyclops serrulatus* (Fisch.) — siletundel-pärissõudik. Üsna sage järvede, jõgede ning tiikide taimestikukogumikes ja lompidest ning turbaaukudes esinev liik.

12a. *Eucyclops serrulatus* var. *proximus* (Lillj.). Eesti NSV-s on seda teisendit leitud järvede litoraalist ja lompidest.

13. *Eucyclops macruroides* (Lillj.) — hammastundel-pärissõudik. Leitud järvede litoraalist ja väiksematest veekogudest (lombid, turbaaugud).

13a. *Eucyclops macruroides* var. *denticulatus* (A. Graeter). Leiukohtadeks on järvede litoraal, turbaaugud ja kraavid.

14. *Eucyclops macrurus* (G. O. Sars) — pikkhark-pärissõudik. Pikkhark-pärissõudikut on leitud järvedest ja jõgedest taimestikukogumikes. Ta on vähem sage kui kaks eelmist liiki.

15. *Paracyclops fimbriatus* (Fisch.) — pikkhark-mudasõudik. Leiukohtadeks on järvede litoraal ja turbaaugud.

16. *Paracyclops affinis* (G. O. Sars) — lühihark-mudasõudik. Liiki on leitud suhteliselt väheste järvede litoraalist.

17. *Ectocyclops phaleratus* (Koch) — ebasõudik. Esineb järvede litoraalis, turbaaukudes, kraavides.

18. *Cyclops strenuus* Fisch. — tavaline sõudik. Usaldusväärsed leukohad: Raadi järv (23. I ja 13. II 1955); turbaaugud Kodijärvel (Elva raj.), turbaaugud Vooremaal, lomp Tartus (kõik 1955. a. kevadel, I. V.)

* 19. *Cyclops abyssorum* G. O. Sars — süviku-sõudik. H. R i i k o j a esitab liigi leiu (küsimärgi all!) Raigastvere järvest. On usaldusväärset leitud üksikutest sügavamatest järvedest: Valgjärvest (29. VII 1952, H. V.), Rõuge Suurjärvest (2. VII 1955, I. V.) ja Udsu e. Lintsi järvest (12. VII 1955, M.).

* 20. *Cyclops lacustris* G. O. Sars — järve-sõudik. Järvesõudikut on leitud vähestest järvedest: Veinjärv, Saadjärv, Ratasjärv, Vasula järv, Ähijärv (R.); Kahrila järv (6. VI 1952, H. V.); Uiakatsi järv (8. VII 1954), Tornijärv (19. VII 1954, M.). Ta on seejuures esinenud ainult sügavamalt kohalt võetud proovides.

* 21. *Cyclops kolensis* Lillj. — koola sõudik. Mainitud liiki leidis esmakordselt N. Schönberg Võrtsjärvest (1954). Hiljem on koola sõudikut leitud veel reast järvedest: Lohja järv (11. III 1955, M.); Elistvere järv (18. III 1955), Pangodi järv (10. IV 1955), Kivijärv (10. IV 1955) ja Saadjärv (22. IV ja 29. V 1955, I. V.). Kõik leiud langevad külmale aastaajale (talv, kevad).

* 22. *Cyclops furcifer* Claus — lombi-sõudik. Liiki on leitud lompidest ja turbaaukudest Tartus, Vooremaal ja Kodijärvel (Elva raj.) (1954. a. sügis ja 1955. a. kevad, I. V.); lompidest Mustamäe ja Harku järve lähedal (8. V 1955, M.). Lombi-sõudik on vähem sage kui *C. strenuus*.

* 23. *Cyclops scutifer* G. O. Sars — tiib-sõudik. Leiukohad: Jõksi järv (12. VI 1953), Kahrila järv (6. VII 1952), Kooraste järv (13. VI 1953), Piigandi järv (10. VI 1953), Valgjärv (29. VII 1952), Verijärv (4. VII 1952), Kirikumäe järv (13. I 1954) (H. V.); Jaala järv (23. VII 1954), Räätsma järv (26. VII 1954), Kurtna järv (26. VII 1954), Uiakatsi järv (8. VII 1954), Väike-Kirjaku järv (24. VII 1954), Viisjaagu järv (15. VII 1954), Torni järv (9. VII 1954) (A. M.); Rõuge Suurjärv (2. VII 1955), Udsu e. Lintsi järv (12. VII 1955, I. V.)

24. *Cyclops vicinus* Ulj. — sale sõudik. N. Samsonovi järgi leitud Saadjärvest.

* 25. *Cyclops insignis* Claus — talvine sõudik. Leiukohad: Kaarepere Pikkjärv (6. IV 1952, H. V.); Kodijärv (6. X 1954, I. V.), Soitsjärv (18. III 1955, I. V.).

26. *Acanthocyclops viridis* (Jur.) — tavaline ogasõudik. Väga laialdaselt levinud liik, kes esineb järvede litoraalis, lompides ja turbaaukudes.

* 27. *Acanthocyclops gigas* (Claus) — hiid-ogasõudik. Leitud pisiveekogudest Tartu ümbruses ja Kodijärvel Elva raj. (1954. a. sügisel ja 1955. a. kevadel, I. V.), Lohja järvest (11. III 1955, M.). Männiku raba turbaaukudest (2. V 1955, M.).

* 27a. *Acanthocyclops gigas* var. *latipes* (Lowndes). Esines Tartu Botaanikaiaia tiigis (23. X 1955, I. V.).

28. *Acanthocyclops vernalis* (Fisch.) — kevadine ogasõudik. Väga laialdaselt levinud kevadistes ja sügisestest lompides.

* 29. *Acanthocyclops capillatus* (G. O. Sars) — külma-ogasõudik. Leitud kinnikasvavast rabalaukast Loosalu järve ääres (23. VII 1955, I. V.).

30. *Acanthocyclops bicuspidatus* (Claus) — täpiline ogasõudik. Väga tavaline liik lompides, aga teda on leitud ka järvede litoraalist.

* 31. *Acanthocyclops bisetosus* (Rehb.) — lombi-ogasõudik. Leitud üleujutatud Emajõe luhalt Tartu juures, lompidest Kodijärvel (Elva raj.) ja Soitsjärve lähedal (1955. a. kevad, I. V.).

* 32. *Acanthocyclops languidus* (G. O. Sars) — raba-ogasõudik. Esmakordselt leiti raba-ogasõudikut lompidest Männiku rabas (2. V 1955, M.). Teisi leiukohti: lomp Kodijärvel (Elva raj.), lomp Soitsjärve ääres, lombid Kõrbjärve (Rõuges) ääres (1955. a. kevad-suvi, I. V.)

* 33. *Acanthocyclops languidoides* (G. O. Sars) — muutlik ogasõudik. Ainsaks leiuks on 1 ♀ kinnikasvavast rabalaukast Loosalu järve lähedal (23. VII 1955, I. V.).

34. *Acanthocyclops nanus* (G. O. Sars) — käabus-ogasõudik. Lisaks vanale leiule rabalombist Jussi Linajärve lähedal (4. VIII 1935, V.) on antud liiki leitud samblalompidest Kõrbjärve (Rõuges) kaldal (4. VII 1955, I. V.).

* 35. *Microcyclops varicans* (G. O. Sars) — muutlik pisisõudik. Ainus leid Vissi järve litoraalist (15. VII 1954, M.)

* 35a. *Microcyclops varicans* var. *rubellus* (Lillj.). Seda varieteeti on leitud turbaaugust Kodijärvel (1. VI 1955, I. V.) ja loigust Kivijärve kaldal (5. X 1955, I. V.)

* 36. *Microcyclops bicolor* (G. O. Sars) — jämeharjas-pisisõudik. Üks levinumaid pisisõudikuid, keda on leitud mitmete järvede litoraalist — Mutsina järv (7 VII 1954), Väike-Kirjaku järv (24. VII 1954), Suur-Kirjaku järv (24. VII 1954) ja Mullutu lahe (10. VIII 1954) kaldavöötimest (M.) Üks leid pärineb linaleolombist Polli lähedalt Abja rajoonist (5. VII 1955, I. V.)

* 37. *Microcyclops gracilis* (Lillj.) — sale pisisõudik. Saledat pisisõudikut leidis H. Riikoja Rootsiküla järvest (31. VII 1920).

* 38. *Acanthocyclops crassicaudis* (G. O. Sars) — jäme oga-sõudik. Liiki on meil senini leitud ainult Tähtvere rabast (8. V 1956, I. V.)

39. *Mesocyclops leuckarti* (Claus) — suvine hõljursõudik. Suvekuudel laialdaselt levinud meie järvede pelagiaalis. 1951.—1953. a. järvede ekspeditsiooni poolt läbiuuritud 93-st järvest esines antud liik 73-s (H. V.).

40. *Mesocyclops oithonoides* (G. O. Sars) — tavaline hõljursõudik. Meie vabariigi järvede pelagiaali suvise planktoni üsna sage liik.

* 41. *Mesocyclops crassus* (Fisch.) — jäme hõljursõudik. Eesti NSV-s on liiki leitud suvekuudel 7 järvest (Kaisma, Karijärv, Kariste, Karula, Murati, Mõrtsuka, Viljandi) ja Narva jõest (M.). Võib arvata, et real juhtudel *M. crassus* on määratud *M. oithonoides*'eks.

42. *Mesocyclops dybowskii* (Lande) — taimestiku-hõljursõudik. Leitud järvedest, peamiselt litoraalist.

Harpacticoida — rullikulised

* 43. *Viguiarella paludosa* (Mrazek) — pikkharjas-samblur. Liiki on leitud samblaloikudest Männiku rabas (2. V 1955, I. V.) ja Kõrbjärve-äärsetest laugastest (Rõuges) (4. VI 1955, I. V.)

* 44. *Nitocrella hibernica* (Brady) — järve-okik. Järve-okik elutseb järvede litoraalis. Leiukohti: Vissi järv (15. VII 1955) (Elva raj.), Päidla järv (12. VII 1954), Uiakatsi järv (8. VII 1954), Torni järv, Kaarna järv (9. VII 1954) ja Juusa järv (9. VII 1954) (kõik Otepää raj., I. V.). Elistvere järvest (4. III 1954) püütud mõneaastase ahvena maos leidis 3♀ isendit (I. V.).

45. *Canthocamptus staphylinus* (Jur.) — ronik. Ronik on tavalisim talvine rullikuline meie järvedes, esinedes peamiselt litoraalis. Leiukohad: Pangodi järv (S.); Võrtsjärv (27 II 1954), Soitsjärv (18. III 1955), Harku järv (8. V 1955), lomp Kodijärvel (12. VI 1955, I. V.).

Elistvere järvest (4. III 1954) püütud mõneaastaste ahvenate maos leidis ♀ ja ♂ isendeid (I. V.)

* 45a. *Canthocamptus staphylinus* var. *microstaphylinus*

(Wolf.) Selle teisendi ainus leid pärineb Harku järvest (10. III 1955, I. V.)

46. *Bryocamptus minutus* (Claus) — väike samblaronik. Lisaks varasemale leiule Pühajärvest (A.) leiti väikest samblaronikut lombist Tartus (5. V 1955, I. V.) ja Lahepera järvest (3. VIII 1951, A. M.)

47 *Bryocamptus vej dovskji* (Mrazek) — kevadine samblaronik. Leiukohale Pühajärvest (A.) lisandub leid lombist Kodijärvel Elva raj. (8. V 1955, I. V.)

* 48. *Bryocamptus pygmaeus* (G. O. Sars) — tavaline samblaronik. Kõige tavalisem rullikuline väikestes veekogudes ja järvede kaldaloikudes. Leiukohad: turbaaugud Emajõe luhal Tartu lähedal (11. X 1954); kevadise suurvee ajal üleujutatud Emajõe luht Tartu juures (7. V 1955) lombid Männiku rabas (2. V 1955); lomp Kodijärvel Elva raj. (8. V 1955); linaleoauk Polli lähedal Abja rajoonis (5. VII 1955); Kivijärve (Elva raj.) kaldaloigud (5. X 1955); Veisjärv (14. VII 1955, I. V.). Pangodi järvest (5. VIII 1952) püütud mõneaastase ahvena maos leidus 1 ♂ kest (I. V.).

* 49. *Arcticocamptus arcticus* (Lillj.) — külmaronik. Liiki on leitud lahtisest kaevust turbalasundis (Tartu) (28. IV 1955) ja samblaloikudest Kõrbjärve ääres (Rõuges) (4. VII 1955, I. V.)

* 50. *Attheyella crassa* (G. O. Sars) — talbjas okasronik. Ainukeseks leiuks on 1 ♀ isend Soitsjärvest (18. VII 1951, I. V.).

* 51. *Attheyella northumbrica trisetosa* Chappuis — järveokasronik. Nimetatud alamliigi leiukohtadeks on kinnikasvanud turbaaugud Emajõe luhal Tartu juures (11. X 1954). Soitsjärv (18. III 1954). Veisjärv (13. VII 1955), Kivijärv (6. VII 1951, I. V.)

* 52. *Moraria brevipes* (G. O. Sars) var. *sarsi* (Mrazek) — raba-nokisronik. Kõrbjärve-äärsetest samblapadjanditest (Rõuges) leiti (4. VII 1955, I. V.) nii emaseid kui ka isaseid. Isaste IV jala siseharu viimase lüli varustuse järgi (5 lisandit, alates siseservast on need järgmised: 1 mittesulgjas harjas, 2 sulgjat harjast, 1 kõverdunud oga, 1 mittesulgjas harjas) on leitud isendid *M. brevipes* ja *M. brevipes* var. *sarsi* vahepealsed, lähenedes kõverdunud oga olemasolu tõttu viimasele. Üks ♀ isend esines Pikkjärvest (Kaareperes) püütud (27. VII 1952) mõneaastase ahvena maos.

* 53. *Moraria schmeili* (Van Douwe) — lombi-nokisronik. Ainsaks leiuks on 1 ♀ Veisjärve litoraalist rabakalda lähedusest (14. VII 1955, I. V.)

KIRJANDUS

1. Audova, A. Pühajärve plankton. Andmeid Pühajärve uurimisest II, Tartu 1923.
2. Riikoja, H. Ülevaade planktonorganismide esinemisest Eesti järvedes. (Käsikiri.) 1944.
3. Riikoja, H. Eesti NSV selgrootute fauna uurimise küsimusi. Loodusuurijate Seltsi aastaraamat 1955, Tallinn 1955.
4. Rylov, W. M. Das Zooplankton der Binnengewässer. Stuttgart 1935.

5. Veldre, H. Eesti NSV järvede *Calanoida* ja *Cyclopoida* faunast. (Käsi-kiri TRÜ zooloogia kateedris.) 1954.
6. Vinkel, R. (Voore, R.) Andmeid Eesti aerjalaliste (*Copepoda*) kohta. Tartu Ülikooli juures oleva LUS'i aruanded XL, 3—4, Tartu 1933.
7. Voore, R. Artiklid ajakirjas „Eesti Loodus” 1934, 4; 1936, 1; 1937, 3, Tartu 1934—1937
8. Боруцкий, Е. В. *Harpacticoida* пресных вод. Фауна СССР Ракообразные, т. III, вып. 4, М.—Л. 1952.
9. Рылов, В. М. *Cyclopoida* пресных вод. Фауна СССР Ракообразные, т. III, вып. 3, М.—Л. 1948.
10. Самсонов, Н. А. Предварительный список животных организмов, собранных в озере Саднерв Лифл. Губ. Протоколы Общества Естествоиспытателей при Императорском Юрьевском Университете XIV. 2, Юрьев 1906.
11. Самсонов, Н. А. К сведениям о планктоне оз. Шпанкау. Протоколы Общества Естествоиспытателей при Императорском Юрьевском Университете XVII, Юрьев 1908.

О ПРЭСНОВОДНЫХ СВОБОДНОЖИВУЩИХ ВЕСЛОНОГИХ ЭСТОНСКОЙ ССР

Аспирант И. Велдре
Кафедра зоологии

Резюме

По опубликованным до сих пор данным из пресных вод Эстонской ССР найдено следующее количество видов свободноживущих веслоногих: 7 видов каланид (*Calanoida*), 20 видов циклопид (*Cyclopoidea*), 3 вида гарпактицид (*Harpacticoida*)

В течение двух последних десятилетий накопилось некоторое количество нового материала о наших пресноводных веслоногих. Составленная в 1944 году Х. Х. Рийкоя рукопись «Обзор о распространении планктонных организмов в озёрах Эстонии» содержит ряд оригинальных данных о наших пресноводных веслоногих. Весьма обширным является зоопланктонологический материал, собранный при рыбохозяйственном изучении внутренних водоемов Эстонской ССР в годах 1951—1954 (Веслоногие проработаны Х. Ю. Велдре и А. Х. Мязетсом). Веслоногих, обитающих в маленьких водоемах, изучали автор и А. Х. Мязетс. В результате этих работ число найденных пресноводных видов веслоногих следующее: каланиды 8, циклопиды 34, гарпактициды 1¹

Каланиды и циклопиды проработаны значительно лучше, чем гарпактициды. Это зависит главным образом от применения для сбора планктона количественной сети Апштейна, которая не охватывает придонных слоев водоема.

Нижеследующая таблица показывает, в каких типах водоемов найдены зарегистрированные в нашей республике пресноводные свободноживущие веслоногие. Латинские названия и таксономический объем их приведены по системе, разработанной в работах В. М. Рылова (1935, 1948) и Е. В. Боруцкого (1952) Виды, не приведенные в до сих пор опубликованных работах, отмечены звездочками. Имена авторов, которые нашли эти виды впервые в Эстонии, указаны в графе следующей за латинскими названиями. Два креста отмечают, что вид встречается в данном типе водоемов довольно часто. Один крест показывает, что вид нашли в данном типе водоемов неоднократно. Цифры указывают, сколько раз вид найден в данном типе водоемов.

¹ В последнее время из пресных вод республики найдены ещё следующие виды: *Paracyclops poppei* (Rehb.), *Elaphoidella gracilis* (G. O. Sars) и *Parastenocaris brevipes* Kessl. (А. Х. Мязетс и И. П. Велдре. Свободноживущие веслоногие (*Eucorperoda*) Эстонской ССР I. Тарту, 1956).

В и д	Автор, который впервые нашел вид в водоемах ЭССР	В о д о е м ы						
		О з е р а		Пруды	Лужи	Заросшие торфяные ямы	Дистрофные водоемы в болотах	
		Пелагиаль	Литораль					
1	2	3	4	5	6	7	8	
Calanoida								
1. <i>Hemidiaptomus amblyodon</i>	И. Р Велдре			1	3			
2. <i>Acanthodiaptomus denticornis</i>							+	
*3. <i>Eudiaptomus coeruleus</i>							1	
4. <i>Eudiaptomus graciloides</i>			++			+		
5. <i>Eudiaptomus gracilis</i>			++			+		
6. <i>Eurytemora lacustris</i>			2					
7. <i>Hetercope saliens</i>								4
8. <i>Hetercope appendiculata</i>			++					
Cyclopoida								
9. <i>Macrocyclops fuscus</i>			+			+		
10. <i>Macrocyclops distinctus</i>						1		
11. <i>Macrocyclops albidus</i>			++			+	1	
12. <i>Eucyclops serrulatus</i>			++	+	+	+		
12a. <i>E. s. var. proximus</i>			+		+			
13. <i>Eucyclops macruroides</i>			++		+	+		
13a. <i>E. var. denticulatus</i>			++			+		
14. <i>Eucyclops macrurus</i>			+					
15. <i>Paracyclops jimbriatus</i>			++			+		
16. <i>Paracyclops affinis</i>			+					
17. <i>Ectocyclops phaleratus</i>			++		+	+		

1	2	3	4	5	6	7	8
18. <i>Cyclops strenuus</i> ¹			1		+	+	
*19. <i>Cyclops abyssorum</i>	Х. Х. Рийкоя	4					
*20. <i>Cyclops lacustris</i>	Х. Х. Рийкоя	8					
*21. <i>Cyclops kolensis</i>	Н. Шенберг	6					
*22. <i>Cyclops furcifer</i>	И. Р. Велдре				+	+	
*23. <i>Cyclops scutifer</i>	Х. Ю. Велдре	16					
24. <i>Cyclops vicinus</i>		1					
*25. <i>Cyclops insignis</i>	Х. Ю. Велдре		3				
26. <i>Acanthocyclops viridis</i>			++		++	++	
*27. <i>Acanthocyclops gigas</i>	И. Р. Велдре		1		+	1	
*27a. <i>A. gigas</i> var. <i>latipes</i>	И. Р. Велдре			1			
28. <i>Acanthocyclops vernalis</i>					++		1
*29. <i>Acanthocyclops capillatus</i>	И. Р. Велдре						
30. <i>Acanthocyclops bicuspidatus</i>			+		++		
*31. <i>Acanthocyclops bisetosus</i>	И. Р. Велдре				3		
*32. <i>Acanthocyclops languidus</i>	А. Х. Мяземетс				+		2
*33. <i>Acanthocyclops languidoides</i>	И. Р. Велдре						1
34. <i>Acanthocyclops nanus</i>							2
*35. <i>Microcyclops varicans</i>	А. Х. Мяземетс		1				
*35a. <i>M. v.</i> var. <i>rubellus</i>	И. Р. Велдре		1			1	
*36. <i>Microcyclops bicolor</i>	И. Р. Велдре		+		1		
*37. <i>Microcyclops gracilis</i>	Х. Х. Рийкоя		1				
*38. <i>Acanthocyclops crassicaudis</i>	И. Р. Велдре						1

¹ Приведены достоверные данные, относящиеся к виду *C. strenuus* s. str.

Табели järg

1	2	3	4	5	6	7	8
39. <i>Mesocyclops leuckarti</i>		++					
40. <i>Mesocyclops oithonoides</i>		++					
*41. <i>Mesocyclops crassus</i>	А. Х. Мязметс	7					
42. <i>Mesocyclops dybowskii</i>			+				
*43. <i>Viguiereella paludosa</i>	И. Р. Велдре					2	
*44. <i>Nitocrella hibernica</i>	И. Р. Велдре		6				
45. <i>Canthocamptus staphylinus</i>			5				
*45a. <i>C. st. var. microstaphylinus</i>	И. Р. Велдре		1				
46. <i>Bryocamptus minutus</i>			2		1		
47. <i>Bryocamptus vej dovskiy</i>			1		1		
*48. <i>Bryocamptus pygmaeus</i>	И. Р. Велдре		2		3	1	1
*49. <i>Arcticocamptus arcticus</i>	И. Р. Велдре					1	1
*50. <i>Attheyella crassa</i>	И. Р. Велдре		1				
*51. <i>Attheyella northumbrica trisetosa</i>	И. Р. Велдре						
			3			1	
*52. <i>Moraria brevipes var. sarsi</i> ¹	И. Р. Велдре						1
*53. <i>Moraria schmeili</i>	И. Р. Велдре		1				

¹ По вооружению последнего членика Епр Р₄ ♂ (5 придатков: 1 неоперенная щетинка и 2 оперенных щетинки на внутреннем крае, 1 изогнутый шип на вершине и 1 неоперенная щетинка на наружном крае) найденные экземпляры являются переходными между *Moraria brevipes* и *Moraria brevipes var. sarsi*; наличием изогнутого шипа они примыкают к последнему.

К ВОПРОСУ О ФИЛОГЕНЕТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ ЯВЛЕНИЯ РЕГЕНЕРАЦИИ У РАСТЕНИЙ

Доц., канд. биол. наук О. Ф. Михайлов

Кафедра генетики и дарвинизма

Явление регенерации имеет весьма широкое распространение как в животном, так и в растительном мире. Особенно хорошо известна и наиболее изучена та форма регенерационных явлений, которая объединяется термином «физиологическая регенерация». Это те случаи, при которых происходит восстановление естественно изнашивающихся в процессе нормальной жизнедеятельности частей или отдельных тканей организма. Наибольший интерес как с научной, так и с практической точки зрения представляет другая группа регенерационных явлений, называемых патологической или репаративной регенерацией.

Репаративная регенерация, особенно у растительных организмов, объединяет в себе несколько различных типов восстановления, в зависимости от целого ряда внутренних и внешних причин. К числу таких причин, обуславливающих тот или иной тип регенерации, относятся, например, свойства детерминации, физиологическое состояние организма, его возраст, стадийное состояние и внешние условия жизнедеятельности. Естественно, что многие из этих факторов определяют и интенсивность регенерации. Упомянув о свойстве детерминации, следует отметить, однако, что в данном случае оно понимается не как некая нематериальная сила или «фатальная определенность», а как материальная и лабильная направленность тех или иных процессов дифференцировки. Не вдаваясь в детальный анализ различных типов репаративной регенерации и причин, их обуславливающих, отметим, что вся эта группа явлений в конечном счете сводится к одной и той же цели. В этом случае целый организм, подвергшийся тем или иным повреждениям, восстанавливает утраченную часть, начиная от отдельной ткани и кончая органом, а в некоторых случаях и целой системой органов.

В тесной связи с явлением репаративной регенерации находится и другое явление, степень распространения которого, однако, значительно меньше. В данном случае имеется в виду явление

ние репродукции или свойства отдельной части, тем или иным путем изолированной от всего организма, возобновить целый организм. В отличие от половой репродукции или вегетативной репродукции, происходящей при наличии превентивной почки, этот тип репродукции мы называем адвентивной репродукцией. Последнее обстоятельство вызвано тем, что при этом типе репродукции возобновление целого организма из изолированной части его происходит как следствие развития адвентивной почки, закладывающейся в изолянте. Совершенно естественно, что как превентивная, так и адвентивная репродукция выполняют одну и ту же биологическую роль и потому могут быть объединены общим термином — «репаративная репродукция».

Несомненно, что репаративные регенерация и репродукция носят приспособительный характер и имеют глубокий биологический смысл. Сравнение и анализ репаративных регенерации и репродукции у животных и растений приводит к необходимости констатации целого ряда отличий как в распространенности этих явлений, так и в характере их протекания. Это обуславливается той глубокой разницей, которая имеет место в биологии животного и растения. Отличительной особенностью растения является свойство метамерности, множественности одноименных органов. Наличие превентивных зачатков органов и способность их новообразований также является специфической особенностью растительного организма, хотя свойство новообразования в ряде случаев имеет место и у животных. Наконец, у растения утраченный или поврежденный орган может восстановиться не на месте поражения, а в совершенно иной части организма. У животных это явление носит лишь исключительный характер и притом наблюдается у весьма ограниченного числа видов.

Такая биологическая особенность растений, как свойство метамерности в развитии органов, является несомненным следствием исторически сложившихся у них особенностей питания. Кроме того, неподвижный образ жизни, отсутствие возможности активно перемещаться из одного участка среды в другой, при наступлении неблагоприятных для жизнедеятельности изменений, также способствовало выработке этого целесообразного приспособления в процессе филогенеза.

Свойству метамерности у растений, как и всякому биологическому свойству, характерно наличие изменчивости, количественного и качественного его варьирования под влиянием меняющихся условий существования. Следствием этого является и имеющая место у растений изменчивость в числе одноименных органов — меристическая изменчивость. Все это, по-видимому, в немалой степени способствовало развитию у растений способности новообразования утраченных органов почти в любой части тела организма, вне зависимости от места утраты.

Несмотря на то, что явления физиологической и репаративной регенерации отличаются друг от друга, они, несомненно, имеют

одну и ту же функциональную основу. Обе эти формы регенерации являются своеобразной реакцией организма на те или иные неблагоприятные воздействия внешней среды. В случае физиологической регенерации эти воздействия носят постепенный, продолжительный характер, и не приводят к видимому нарушению функциональной деятельности, в связи с чем и процесс регенерации, восстановления протекает замедленно и постепенно. В случае резких, сильнодействующих воздействий со стороны внешней среды, вызывающих не только нарушение морфологической структуры, но и нарушение, а в некоторых случаях полное прекращение функциональной деятельности какой-либо части организма, происходит и соответствующая реакция его. Организм стремится сравнительно быстро восстановить утраченную часть, а вместе с этим и нарушенную функциональную деятельность. В ряде случаев от скорости репаративной регенерации зависит не только быстрое восстановление той или иной функциональной деятельности, но и жизнь самого организма. В еще большей степени это относится к случаям такого травмирования растения, когда оно перестает существовать как целое. Тогда на сцену выступает последний резерв для поддержания жизни индивидуума, а вместе с тем и вида, — репаративная репродукция.

Говоря о физиологической регенерации как о естественном физиологическом процессе, неотделимом от нормальной функциональной деятельности организма, следует сделать вывод, что эта форма регенерации свойственна и необходима любому живому существу, вне всякой зависимости от степени или высоты его организации и филогенетического возраста. Естественно возникает вопрос, так ли это в случае репаративных регенерации и репродукции? В данном случае, как это уже и отмечалось выше, не может быть речи о каком-то едином проявлении этих свойств у животных и растительных организмов, причиной чего являются их биологические различия. Что же касается растений, то мнения различных исследователей в этом вопросе резко расходятся. Одни из них, связывая регенерационную способность со степенью организации растения, утверждают обратную зависимость первой от второй. Другие, наоборот, считают, что, с повышением организации, повышается и регенерационная способность. Третьи, наконец, вообще не связывают регенерационную способность с ходом эволюции.

Мы не согласны ни с одним из этих направлений и прежде всего потому, что каждое из них пытается установить зависимость регенерации только от какого-либо одного фактора, а это, конечно, неправильно. Регенерационная, а тем более репродукционная способность, обусловлена целым комплексом обстоятельств, в число которых входят и внешние и внутренние причины, являющиеся следствием как филогенеза, так и онтогенеза.

То обстоятельство, что регенерационные свойства какого-либо органа у одного и того же растения проявляется резко различно, в

зависимости от возраста, стадийного состояния, физиологического состояния и т. п., чрезвычайно запутывают вопрос. Этому обстоятельству мы, по-видимому, обязаны и всякого рода идеалистическим гипотезам и теориям регенерации, согласно которым последняя вообще не поддается рациональному объяснению. Именно наличием свойства регенерации у живых существ доказывается, например, по мнению Дриша, наличие нематериального фактора развития — энтелехии.

Материальное по форме, но идеалистическое по существу объяснение причин регенерации давал и Август Вейсман. Согласно его концепции, регенерация является следствием развития, вылившейся при повреждении клеток т. н. резервной зародышевой плазмы.

Вейсману же мы обязаны и появлением концепции, утверждающей существование в природе закона, согласно которому регенерационная способность снижается в ходе эволюции по мере усложнения организации живых существ. Современные фактические данные показывают несостоятельность этого утверждения, т. к. и среди растений и среди животных в пределах одной и той же таксономической группы имеются формы, способные и неспособные к регенерации. Имеется целый ряд растительных форм с высокой степенью организации, обладающих сильно выраженной регенерационной способностью и, наоборот, ряд форм с низкой степенью организации, почти не проявляющих регенерационных свойств. Анализ этих фактов показывает, что регенерационная способность и степень ее проявления не находится ни в прямой, ни в обратной зависимости от высоты организации, а является следствием исторических и современных условий существования и функциональной деятельности организма. Тем не менее проблема регенерации в целом, несомненно, носит филогенетический характер. В этом следует согласиться с мнением целого ряда исследователей, в частности Коршеля (1927). Кренке Н. П. (1950), Тахтаджяна А. Л. (1954) и др. Однако, трактуя регенерацию с исторической, филогенетической точки зрения, нельзя ограничиваться только этим. Свойства регенерации любого типа и формы, являясь своеобразной реакцией организма на воздействия внешней среды, обусловлены целой совокупностью этих взаимоотношений как в филогенетическом, так и в онтогенетическом плане. Односторонний анализ регенерации не только не разъясняет вопроса, но еще больше запутывает его. Примером этому могут служить и оказавшиеся в тупике концепции Вейсмана и взгляды других, более поздних исследователей. Тот же самый Коршель, исходя только из исторической оценки регенерации, рассматривал последнюю как проявление атавизма. Отчасти это, конечно, верно. Сейчас ни у кого, по-видимому, не вызывает сомнения, что свойство регенерации является одним из самых древних, из начальных свойств живых существ. Но если исходить из этой точки зрения, то что тогда следует понимать под атавизмом?

По сути дела любое проявление жизнедеятельности имеет свою большую или меньшую историю. Следовательно, все эти свойства следует отнести к атавистическим. Если, согласно некоторым авторам, понимать под атавистическим характером регенерации то, что при восстановлении той или иной поврежденной или утраченной части организма имеет место упрощение ее, следовательно, якобы возврат к эволюционно более простой организации, то это не соответствует действительности. При физиологической регенерации эти случаи вообще не имеют места. Что же касается репаративной регенерации и, тем более, репаративной репродукции, то современные многочисленные данные говорят не столько о возврате к ранее существовавшим более простым формам, сколько о морфофизиологических новообразованиях. Это является несомненным подтверждением того, что регенерационные свойства обуславливаются не только историческими факторами. Об этом же свидетельствует и значительная вариабильность регенерации в количественном и качественном отношении, в зависимости от целого ряда условий. Это, наконец, подтверждается способностью в ряду поколений ослаблять или усиливать регенерационные свойства организма в целом или его отдельных частей.

Односторонний анализ проблемы регенерации ошибочен и в методологическом отношении, т. к. приводит исследователей к метафизическому представлению, согласно которому регенерация рассматривается как некое абстрактное свойство, не подчиняющееся общим законам жизнедеятельности организма и не связанное с условиями существования последнего.

Разрешение вопроса о биологической роли явления регенерации и, в частности, филогенетического значения ее тесным образом связано с вопросами о причинах и побудителях.

Причины и побудители регенерации различны, хотя и могут иметь общие исторические корни. Вместе с тем, некоторые исследователи не делают между ними никаких разграничений. Это в свою очередь ведет к ошибочным выводам. Габерландт (1929), например, пришел к выводу, что изолированный орган или часть органа «испытывает недостаток своих прежних отношений ко всему организму и стремится ныне вновь установить эти отношения». Нематериалистический характер такого объяснения совершенно очевиден. О «потенции к повторному образованию потерянных частей» говорит и Коршелът. Миэ (1926) и некоторые другие сторонники витализма предполагают существование в различных тканях организма особых клеток, носительниц т. н. архиплазмы, которая якобы и обуславливает регенерацию. Известный исследователь регенерационных процессов у изолированных частей растений Уайт Ф. Р (1949) подробно обсуждает вопрос о тотипотентности, свойстве растительных клеток давать любые формы, или об обособлении клеток, потери ими этих свойств. Однако автор разбирает этот вопрос без учета исторически сложившихся особенностей организма и его взаимоотношений с внешней

средой. Работа и метод этого исследователя сводятся к искусственному расчленению организма вплоть до входящих в его состав клеток и изучению происходящих при этом в определенных условиях процессов дифференцировки. Естественно, что в таких случаях организм перестает существовать как целое, нарушается весь комплекс взаимоотношений частей, и процессы дифференцировки в этих частях происходят уже иначе.

Клебс Г (1905), к мнению которого присоединяется и Кренке, трактует регенерацию как свойство организма «осуществлять присущие его внутренней структуре возможности развития при наличии известных условий». Внутренняя же структура обуславливается филогенезом. Кренке приходит при этом к выводу, что факторы, стимулирующие деление клеток, могут стать и причиной регенерации. С этим обстоятельством нельзя не согласиться, ибо процесс регенерации не мыслим без того или иного типа деления, размножения клеток, например, т. н. дробления. Еще Ч. Дарвин (1909) высказал предположение о том, что свойство регенерации имеет общие основы со способностью организмов к бесполому размножению.

После Ч. Дарвина идея исторической связи между бесполом размножением и регенерацией нашла себе целый ряд противников и сторонников. В последнее время, применительно к животным организмам, эти вопросы разбирались Студитским А. Н. (1950, 1954) и Воронцовой М. А. (1949, 1953)

Разрабатываемая Студитским «биологическая теория регенерации», основываясь на взглядах Ч. Дарвина, высказанных им в его «временной гипотезе пангенезиса», представляет бесспорный интерес и во многих отношениях согласуется с диалектико-материалистическими принципами анализа явлений. Однако, на наш взгляд, автор этой теории в некотором отношении все же не прав. Справедливо критикуя Моргана и Пржибрама, считавших регенерацию неким изначальным свойством живого, неотделимым от самого понятия «жизнь», Студитский по сути дела отрицает при этом и известную общность явлений регенерации и бесполого размножения, о которой неоднократно говорил Ч. Дарвин. Конечно, нет никаких оснований для полного отождествления регенерации с бесполом размножением, тем не менее, нет оснований и для отрицания общности между ними как в происхождении, так в ряде случаев и в проявлении.

Высказывая свои соображения о причинах регенерации, Студитский приходит к выводу, что таковой, во всяком случае у внутренних органов животных, является формообразовательное действие функции остатка органа. Нам это обстоятельство кажется не доказанным, особенно по отношению к наружным органам как у животных, так и, тем более, у растений. По-видимому общеизвестно, что у растений восстановление органа или системы органов легко происходит без наличия какого-либо остатка, сохраняющего

функцию целого органа. Возобновление органа может иметь место совершенно в иной части организма, вне района повреждения.

Не вызывает никакого сомнения, что движущей силой формообразовательного процесса является функция, однако в данном случае следует иметь в виду функциональную деятельность всего организма в целом, а не только его отдельной части. Известно немало случаев у тех же животных организмов, когда в результате утраты одного органа его функцию начинает выполнять другой орган, а на месте утраченного восстанавливается орган с функциональной деятельностью второго, заменяющего утраченный (например, у омаров).

Автор «биологической теории регенерации» делает неправильный вывод, что, если уровень восстановительной реакции определяется интенсивностью функции утраченной части, то, при усложнении организации животного, происходит повышение восстановительных реакций, т. е. регенерационных процессов. Приводимые при этом примеры вполне достоверны, однако они не демонстрируют правильности взглядов автора и говорят о случаях совпадения с одной стороны, повышающейся из поколения в поколение степени организации живого существа и, с другой стороны, усиливающегося из поколения в поколение приспособительного характера регенерации данного органа у данного объекта. Нам кажется, что, несмотря на то, что регенерационное свойство в целом носит несомненный приспособительный характер, биологическая значимость его для организмов разного вида различна, как различна и степень этого приспособления.

Согласно воззрениям Воронцовой М. А. (1953), регенерационная способность родственна в ряде отношений и связана исторической преемственностью с бесполом размножением животных, однако не всегда совпадает с последним. В процессе эволюционного развития животных их регенерационная способность нашла ряд самостоятельных форм проявления. У организмов, утративших бесполое размножение, свойство регенерации проявляется лишь как одна из форм реакции организма на повреждение.

Такого рода концепция с нашей точки зрения представляется совершенно верной и в еще большей степени применимой к растительным организмам. Несомненно, что в процессе эволюции растений первичной формой размножения являлось бесполое размножение, которое и в настоящее время может проявиться, при наличии определенных условий, у любого представителя растительного мира. В ряде случаев, наконец, бесполой способ размножения у современных форм растений является или доминирующим или даже единственным, благодаря образовавшимся в процессе эволюции специальным органам вегетативного размножения. Несомненно также, что процесс регенерации морфологически начинается и протекает далее при наличии процесса деления, размножения клеток. Та или иная дифференцировка последних, по-видимому, является следствием, а не причиной. Если говорить

о репаративной репродукции, то фактически исчезает разница между последней и бесполом (вегетативным) размножением в конечном результате. Однако, несмотря на их тесную связь и историческую общность происхождения, форма их протекания различна.

Приводимая нами возможная схема исторической связи всех этих явлений (рис. 1) показывает общность их происхождения (в случае превентивной и адвентивной репродукций также общность их биологической цели) и, в то же самое время, различие этих

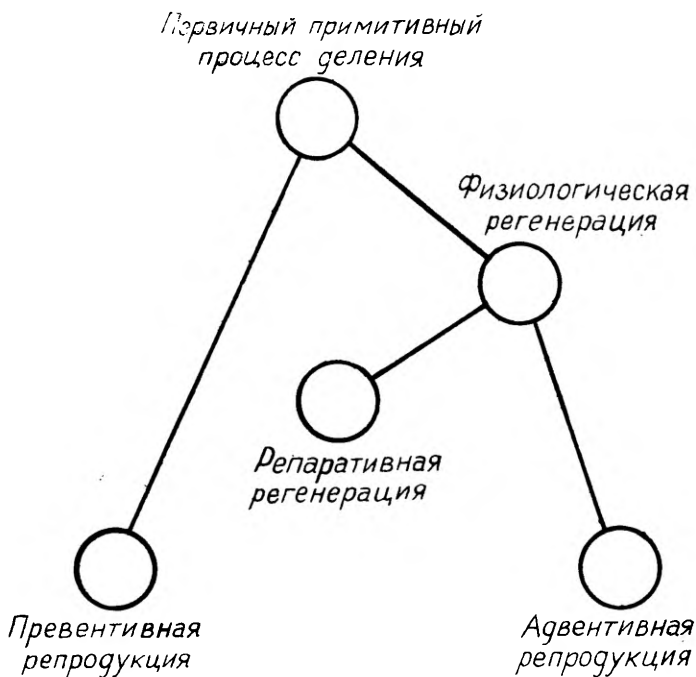


Рис. 1. Схема исторической общности происхождения и связей бесполого размножения и свойств регенерации у растений.

явлений, в зависимости от целого ряда условий жизнедеятельности организма и его взаимоотношений со внешней средой.

Одним из важнейших доказательств вышесказанного является общность физиологических причин деления клеток и регенерации. В этом отношении мы всецело согласны с Кренке, утверждавшим, что если не принимать во внимание тот или иной характер регенерации, то факторы, стимулирующие деление клеток, могут быть и причиной регенерации. Многочисленные данные в области действия всякого рода стимуляторов — ростовых веществ растений — наглядно это иллюстрируют. Таким образом, историческое возникновение регенерационной способности у растений тесно свя-

зывается с процессом бесполого размножения. Прямым следствием этого являются неспециализированные формы вегетативного воспроизведения, каковым оказывается адвентивная репродукция в различных ее проявлениях.

Явления репаративной регенерации и адвентивной репродукции имеют большое значение для решения многих вопросов морфогенеза органов у растений. Это обстоятельство отмечено целым рядом авторов, в том числе и нами [Михайлов О. Ф. (1952) и в настоящем сборнике]. Эти же явления могут быть с успехом использованы и используются и для решения некоторых вопросов эволюционной морфологии.

Свойство регенерации является источником всякого рода аномальных структур и функциональных проявлений. В этих случаях происходит нарушение нормального хода морфогенеза и всего онтогенеза в целом, если имело место соответствующее повреждение и последующий регенерационный процесс, особенно на ранних стадиях развития.

Некоторые исследователи, например, Рыжков В. Л. (1941), Тахтаджян А. Л. (1954) и др. разделяют аномалии на несколько типов и, в зависимости от их характера, придают им ту или иную роль в решении вопросов эволюционной морфологии. Эти авторы считают, что если в той или иной аномалии имеет место проявление анцестральных признаков или признаков другой гомологической структуры, то это представляет особый интерес для филогении. В случаях же нарушения нормального морфогенеза, при которых не воспроизводятся ни анцестральные, ни современные признаки другой гомологической структуры, в большей степени заинтересованы онтогенетики, хотя эти случаи не безинтересны и для эволюционной морфологии.

С мнением этих авторов нельзя не согласиться, хотя подобное разделение аномалий, на наш взгляд, все же носит условный характер, т. к. не всегда представляется возможность с достоверностью определить, атавистический или не атавистический характер носит изучаемое отклонение. Кроме того, даже в тех случаях, когда признак носит явно атавистический характер, он не является и не может являться буквальным воспроизведением предковой структуры, т. к. это противоречит закону необратимости развития. Фактический материал показывает, что при возникновении атавистических признаков «возврата» в прямом понимании этого слова не наблюдается. Имеющие место те или иные уклонения в сторону предковых форм по существу только напоминают элементы прошлой формы, а не повторяют ее буквально. Тесная связь и взаимозависимость онтогенеза и филогенеза и выражается в данном случае в том, что если развивается какой-либо атавистический признак, то он несет на себе больший или меньший отпечаток современности. Такого рода коррелятивная связь атавистических проявлений с современными признаками растения и придает атавизмам относительный, а не абсолютный характер.

Причиной всякого рода аномалий (тератизмов) у растений является комплекс внутренних и внешних факторов, которые и вызывают отклонение от нормы процесса развития. При этом аномальные образования могут иметь место не только на ранних стадиях онтогенеза, но, благодаря свойству регенерации, и в конечных его этапах. Примером этому может служить известное и в естественной обстановке явление пролификации, израстания у сложноцветных. В данном случае отсутствие оптимальных условий на световой стадии развития приводит к кажущемуся возврату растения к более ранней фазе развития. Морфологически это проявляется в том, что в соцветии начинается образование вегетативных побегов, являющееся следствием приостановки генеративной фазы развития и продолжением вегетативной фазы. Это явление сравнительно легко воспроизвести в лабораторных условиях. Мы часто наблюдали его у растений-новообразований подсолнечника адвентивного происхождения (Михайлов О. Ф., 1952).

Говоря о том, что причинами, обуславливающими аномальное восстановление органов или аномальную репродукцию адвентивного характера, является целый комплекс условий, следует отметить, что побуждение этих аномалий может быть вызвано каким-либо одним или ограниченным числом факторов, как, например, в вышеприведенном случае. По нашим наблюдениям, любой фактор внутреннего или внешнего характера, вызывающий нарушение нормального типа обмена веществ, приводит к патологическому развитию регенерирующей части или всего организма, адвентивного происхождения.

Весьма часто имеют место аномалии чисто генетической природы, являющейся в ряде случаев следствием генетической разнокачественности тканей. К таким случаям относятся, например, описанные Дарвином и изученные Мичуриным почковые вариации.

Фактические данные показывают, что чем в большей степени произведено нарушение организма, безразлично механическим ли путем или вследствие заболевания, тем в большей степени процесс восстановления приводит к атаксистическим признакам. Это обстоятельство обуславливается самой природой организма. Каждый организм определенного вида представляет собой сложную корреляционную систему частей, отличающихся друг от друга в морфологическом, физиологическом и генетическом отношении. Отдельные части, органы растения обладают некоторыми своими собственными особенностями взаимоотношения с внешней средой и различным филогенетическим возрастом. Все это приводит к тому, что каждый организм представляет собой также и взаимосвязанный комплекс наследственных возможностей. Одни из этих возможностей имеют филогенетически более раннее происхождение, другие — более позднее. Это в свою очередь отражается на развитии признаков и свойств в процессе онтогенеза. Если онтогенез всего организма или части его нарушается тем или иным

путем, то нормальный ход морфогенеза оказывается не только нарушенным, но и расшатанным. Последнее обстоятельство проявляется в том, что происходит ослабление филогенетически более новых наследственных возможностей и доминирование более старых. В результате такого доминирования более старых и более устойчивых наследственных возможностей происходит развитие и более старых признаков атактистического характера.

Изучение всех этих вопросов, на наш взгляд, представляет существенный интерес не только для онтогенетики, но и, в меньшей степени, для эволюционной морфологии. Свойство регенерации, являющееся основой таких явлений, как трансплантация, тератология и адвентивное воспроизведение растительных организмов, имеет поэтому важнейшее значение для раскрытия ряда закономерностей эволюционного морфогенеза.

ЛИТЕРАТУРА

- Воронцова, М. А. Регенерация органов у животных. Сов. наука, Москва 1949.
- Воронцова, М. А. Восстановление утраченных органов у животных и человека. Сов. наука, Москва 1953.
- Дарвин, Ч. Изменение животных и растений в домашнем состоянии. Собр. сочин., т. VI. Изд. Лепковского, Москва 1909.
- Клебс, Г. Произвольное изменение растительных форм, Москва 1905.
- Кренке, Н. П. Регенерация растений. Из-во АН СССР Москва—Ленинград 1950.
- Михайлов, О. Ф. Биологическая специфика семядолей в семенах растений, не сохраняющих эндосперм. Научн. труды, посвященные 150-летию ТГУ, Таллин 1952.
- Рыжков, В. Л. Позеленение цветка с точки зрения механики развития. Бот. журн. СССР, 26, 1941.
- Полежаев, Л. В. Некоторые принципы в учении о регенерации. Журн. общ. биол. II, № 4, 1950.
- Студитский, А. Н. Эволюционно-гистологические основы учения о регенерации. Труды 5-го Всес. съезда анат., гист. и эмбр. 5—11 июля 1949 г., Ленинград 1950.
- Студитский, А. Н. Основы биологической теории регенерации. Труды и-а морф. жив. им. А. Н. Северцова, вып. II, 1954.
- Тахтаджян, А. Л. Вопросы эволюционной морфологии растений. Из-во Ленингр. Унив., Ленинград 1954.
- Уайт, Ф. Р. Культура растительных тканей. Из-во иностр. лит., Москва 1949.
- Haberlandt, G. Ueber Regenerationsvorgänge bei Bryopsis und Codium. Sitzgsber. preuss. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. 1929.
- Korschelt, E. Regeneration und Transplantation, Bd. I. Regeneration. Berlin, Gebr. Bornträger, 1927.
- Miehe, H. Das Archiplasma. Betrachtungen über die Organisation des Pflanzenkörpers. Jena, Gustav Fischer, 1926.

TAIMEDE REGENERATSIOONINÄHTUSE FÜLOGENEE- TILISEST TÄHTSUSEST

Dots. biol. tead. kand. O. Mihhailov

Geneetika ja darvinismi kateeder

Resümee

Regeneratsioon on taimeriigis väga laialdaselt levinud nähtus. Erilist huvi pakub taastamise mitmesuguste tüüpide rühm, mida ühendatakse ühise terminiga „reparatiivne regeneratsioon”

Tihedas seoses reparatiivse regeneratsiooni nähtusega on terve organismi küljest eraldatud osa omadus taastada kindlates tingimustes kogu organism. See terviku taastamise omadus tema osa poolt, mis on tingitud adventiivse loote tekkest isoleeritud osas, on meie poolt nimetatud adventiivseks reproduktsiooniks.

Adventiivsel reproduktsioonil on ühine bioloogiline eesmärk preventiivse reproduktsiooniga, s. o. selliste juhtudega, kus organismi osa taastab terviku preventiivse punga olemasolu korral. Selleks ühiseks eesmärgiks on liigi säilitamine. Ühise lõppeesmärgi tõttu võib adventiivset ja preventiivset reproduktsiooni nimetada ühise terminiga „reparatiivne reproduktsioon”

Reparatiivne reproduktsioon on peaaegu eranditult taimsete organismide iseärasus.

Reparatiivse regeneratsiooni ja reproduktsiooni nähtused omavad terve rea spetsiifilisi iseärasusi nii vormis kui ka kulgemises. See asjaolu on metameersuse ja meristemaatilise muutlikkuse omaduste esinemise tulemuseks taimedel.

Reparatiivsel regeneratsioonil ja tema baasil ajalooliselt tekkinud reparatiivsel reproduktsioonil on samad füsioloogilised alused kui loomulikul ehk füsioloogilisel organite ja kudede regeneratsiooninähtusel. Need füsioloogilised alused on omakorda tihedas seoses rakkude jagunemise protsessidega. Tingimused, mis stimuleerivad rakkude jagunemist, võivad sageli olla ka regeneratsiooni põhjuseks.

Regeneratsiooni ja reproduktsiooni põhjusi ning tekitajaid ei saa siiski vaadelda kui mingi ühe faktori mõju tulemust, vaid need on terve sisemiste ja väliste nähtuste kompleksi tulemuseks. Nende nähtuste hulka kuuluvad ka determinatsiooni materialistlikud sea-

dused ja organismi füsioloogiline seisund, tema vanus, stadiaalne seisund ja lõppeks elutegevuse välised tingimused.

Reparatiivne regeneratsioon ja reparatiivne reproduktsioon on tihedas, ajalooliselt tekkinud seoses taimede mittesugulise paljune misega, kuid nende nähtuste täielik samastamine ei ole õige.

Taimede regeneratsiooni nähtuste keerulisus ja mitmekesine iseloom viis rea uurijaid selle nähtuse ühekülgsale analüüsile. Tehti ja tehakse katseid siduda regeneratsiooniomadust mingi ühe fülogeneetilise või ontogeneetilise iseloomuga tingimusega, näiteks kinnitada regeneratsiooni otsest või vastassuunalist sõltuvust evolutsioonilise organisatsiooni astmest. Sellised kinnitused ei põhine aga seaduspärasel faktilisel materjalil. Leidub fakte nii ühe kui ka teise vaatekoha kaitseks. See on regeneratsiooni suurema või vähema kohastusliku tähtsuse tulemuseks, mis tugevneb või nõrgeneb antud organismide liigi rea põlvkondade vältel.

Regeneratsioonivõime fülogeneetiline ja ontogeneetiline tingitus soodustab terve rea taimede morfogeneesi küsimuste lahendamist nii fülogeneetilisest kui ka ontogeneetilisest lähtekohast. Selleks aitavad tunduvalt kaasa regeneratsioonivõime baasil toimuvad selliste nähtuste uurimine, nagu transplantatsioon, teratoloogia ja taimorganismide adventiivne paljunemine.

КУЛЬТИВИРОВАНИЕ КАЛЛЮСА ИЗОЛИРОВАННОЙ СЕМЯДОЛИ КАК СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ РАСТЕНИЙ-НОВООБРАЗОВАНИЙ

Канд. биол. наук Э. О. Пийпер

Кафедра генетики и дарвинизма

За последние годы внимание биологов различных стран все более и более привлекает вопрос об адвентивных образованиях. Адвентивные образования, к которым относятся как отдельные ткани и органы растения, так и целые зародыши, представляют интерес с самых различных точек зрения. Современная экспериментальная эмбриология, например, включает в себя целый раздел, связанный с получением и изучением адвентивных зародышей.

На кафедре генетики и дарвинизма Тартуского государственного университета получение адвентивных образований из недифференцированной ткани каллуса изолированных семядолей широко используется как весьма удобный метод, с помощью которого изучается целый ряд вопросов органогенеза, морфогенеза и биологии развития растений.

Заложение отдельных органов или целого адвентивного зародыша в гомогенной ткани без участия полового процесса позволяет сделать еще более ясной картину дифференцировки зародыша из зиготы, возникшей как следствие полового процесса.

Изучение адвентивных зародышей благоприятствует разрешению ряда вопросов чисто генетического характера.

Наконец, большой теоретический и практический интерес представляют собой и растения-новообразования, выращиваемые из адвентивных зародышей. Растения-новообразования, помимо всякого рода патологических отклонений, при определенных условиях воспитания проявляют целый ряд наследственно сохраняющихся полезных в хозяйственном отношении признаков, вследствие чего их весьма удобно использовать как исходный материал для селекции.

Одной из задач научных исследований коллектива нашей кафедры является сравнительное изучение морфогенеза и биологии развития растений-новообразований, вследствие чего возникает необходимость в дальнейшей разработке и улучшении методики по-

лучения адвентивных зародышей. Принимая во внимание выше-изложенное, целью моей работы явилось выяснение некоторых условий среды, облегчающих получение целых адвентивных зародышей в каллюсе изолированной семядоли, необходимых для последующего выращивания из них растений-новообразований.

Проблема получения растений-новообразований из каллюса в научной литературе

Литература по данному вопросу объемиста, но результаты работы — т. е. получение целых растений из каллюса — не велики.

В 1779 г. появилась работа Боннэ (Bonnet Ch.); это по-видимому, первое исследование, в котором указывается возможность получения целого растения из отдельных частей семени. Автору, работавшему с фасолью и гречихой, удалось получить слабые растения, но семена от них получены не были. Вслед за Боннэ исследователи различных стран ставили своей целью изучение каллюса и возможности получения адвентивных зародышей из отдельных частей семени.

К числу исследователей, занимавшихся этим вопросом, относятся, например, Трекю (Trécul M., 1853) и Столь (Stoll R., 1874), изучавшие образование каллюса на саженцах; Ван-Тигем (Van Tieghem 1873), получивший корни и почки из изолированных семядолей подсолнечника и некоторых тыквенных; Блоцишевский (Błociszewski T., 1876), получивший корни на семядолях различных растений (горох, кукуруза, редька, клещевина, рожь, и овес); Цабель (1882), получивший у семядолей *Pisum sativum* и *Phaseolus multiflorus* только корни, и у *Borrago officinalis* стеблевые образования, адвентивное происхождение которых, однако, вызывает сомнение; Фехтинг (Vöchting H., 1908), получивший корни у изолированной семядоли гороха на месте прикрепления ее к гипокотилу; Кюстер (Küster E., 1903), получивший, по-видимому адвентивные зародыши на семядолях *Cucumis*, *Cucurbita* и *Luffa*; Смит (Smith L., 1907), работавший с изолированными частями семян целого ряда растений различных семейств, и получавший у изолированных семядолей только корни.

Никому из всех вышеназванных исследователей не удалось получить целые жизнеспособные и плодоносящие адвентивные растения.

В начале настоящего столетия Калашникову Л. (1924) удалось получить из каллюса семядоли огурца целое растение, которое зацвело, но впоследствии погибло. Дунин М. и Кузнецова А. (1933) получили жизнеспособные растения сои, которые плодоносили в полевых условиях, однако авторы не приводят их морфогенетического анализа.

Целые растения-новообразования получали, по-видимому, еще

некоторые исследователи, например: Ковалевская (Kowalewska Z. 1927—28), Фуйа (Fuja M. S., 1929), Флеров А. Ф. и Флеров В. А. (1948) и др., однако и в этих случаях вопросам морфогенеза не уделялось достаточного внимания и, что для нас самое главное, методика получения этих растений по целому ряду обстоятельств не являлась совершенной.

Многие исследователи стремились воспроизвести растения-новообразования из листьев, так напр. Линденмут (Lindenmuth H., 1903) получал корни на листьях *Phlox Drummondii* и *Dianthus Caryophyllus*. Винклер (Winkler H., 1903) получал, по-видимому, адвентивные почки на листьях *Torenia asiatica*. Завадский К. М. (1951) получал корни и почки на листьях бегонии (*Begonia rex*) и доказывал возможность получения стеблевых почек из одной эпидермальной клетки, на что однако, указывали уже Пристли и Свингль (Priestley J. H. and Swingle C., 1929).

Только в последнее время работы в области получения адвентивных зародышей в культуре каллюса стали носить конкретный характер и получили теоретическое обоснование. К работам такого типа, в которых приводится как методика, так и соответствующий анализ адвентивных образований в изолированной части растения или в культуре ткани, относятся работы Уайта Ф. Р. (1949) и Михайлова О. Ф. (1951, 1952 и в настоящем сборнике).

Материал и методика.

В качестве исходного материала были использованы семянки подсолнечника (*Helianthus annuus* L.) сорта «Саратовский-169», выведенного в 1913 г. Плачек Е. М. на Саратовской селекционной станции методом семейственного индивидуального отбора. Нами использованы семянки, полученные из Всесоюзного Института Растениеводства в Ленинграде. Материалом послужили также семянки репродукции 1953 г., выращенные на Биологической станции Тартуского Гос. Университета.

Параллельно были проведены некоторые опыты с семенами гороха (*Pisum sativum* L.) сорта «Масличный».

Вышеназванные растения были избраны, как представляющие известный интерес для сельского хозяйства, и вследствие того, что одной из практических задач кафедры является получение хороших исходных форм подсолнечника для селекции в условиях Эстонской ССР

Опыты ставились зимой и весной 1952, 1953 и 1954 гг. в лабораторных условиях. Семена освобождались от оболочек и замачивались в воде на фильтровальной бумаге в течение 24 часов, иногда и дольше (в течение 48, 72 и 96 часов) Затем с помощью лезвия бритвы прямым или клинообразным срезом удалялся зародыше-

вый корешок и стебель. Изолированные семядоли размещались срезанной поверхностью вверх на (предварительно прокаленном) влажном песке в вегетационных сосудах или в чашках Петри. Сосуды и инструменты во время работы стерилизовались спиртом и в пламени спиртовки. По мере подсыхания песок смачивался водопроводной водой комнатной температуры. Сосуды с изолированными семядолями помещались в вегетационные камеры, где поддерживалась желаемая постоянная температура и влажность.

Опыты ставились в нескольких повторностях по 10—50 изолированных семядолей в каждой.

В целях изучения влияния предварительного «охлаждения» изолянтов на последующие процессы дифференцировки, за неимением холодильной камеры, они размещались в холодных помещениях, на открытом воздухе, или же закапывались в снег (вместе с термометром для проверки температуры) на глубину 70 см, где при температуре воздуха от -15 до -20°C удерживалась константная температура около $2,5^{\circ}\text{C}$. После воздействия на изолянты низких температур они переносились в вегетационную камеру с постоянной положительной температурой и влажностью, которая определялась по психрометру Августа. Регистрация температуры и влажности камеры производилась ежедневно по три раза в день: в 9, 12 и 15 ч. в продолжении всего опыта.

Изучение возможного стимулирующего влияния углекислого газа и паров серной кислоты на регенерационные процессы в изолированных семядолях было связано со многими трудностями вследствие отсутствия в этой области каких-либо данных и из-за отсутствия соответствующей аппаратуры, которую приходилось конструировать самим.

В опытах по изучению влияния углекислого газа — семена, предварительно замоченные в продолжении 24 часов и надлежащим образом оперированные (удаление зародыша), подвергались воздействию CO_2 в продолжение различных периодов времени, от 1 часа до 4-х суток.

Углекислый газ, получаемый воздействием соляной кислоты на углекислую известь в аппарате Киппа, накапливался в вакуумной камере, куда заранее подвешивались в мешочке из марли изолированные семядоли и где они оставались на определенный период времени. Содержание углекислого газа определялось при помощи аппарата Орса. После воздействия CO_2 изолированные семядоли размещались во влажном песке в специальной вегетационной камере.

В опытах по изучению влияния паров серной кислоты на заложение адвентивных зародышей изолированные семядоли, находящиеся во влажном песке, ставились в эксикатор над сосудом с серной кислотой.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

I. Образование зародышей в изолированных семядолях при различных температурах

Многочисленные опыты показали, что культивирование изолированных семядолей на свету при обыкновенной комнатной температуре и влажности не дает удовлетворительных результатов. Если и имеет место появление каллюса и образование из него корешков, то процент репродукции целых растений со стеблем и листьями обыкновенно очень низок. Вегетационные сосуды с изолированными семядолями (тотчас же после операции) ставились в таких случаях во влажную камеру при постоянной комнатной температуре и влажности до появления проростков.

Опыты, предпринятые с целью выяснения оптимальной температуры для образования зародыша в изолированных семядолях подсолнечника, можно подразделить: 1) на опыты с культивированием изолированных семядолей при постоянной положительной температуре и 2) на опыты, в которых изолированные семядоли предварительно подвергались охлаждению или «закалке».

В обычных опытах с изолянтами испытывались температуры от 10 до 30° С. Было выяснено, что оптимальной температурой для семядолей подсолнечника является 20—25° С, при соответственной влажности от 50 до 70%. При температуре немного выше 30—35° С и влажности около 100% число новообразований начинает резко снижаться.

Степанов В. Н. (1948) приводит следующие минимальные температуры прорастания нормальных семян подсолнечника сорта «Саратовский 169». При 1—2° С семена наклеиваются, но затем следует массовое заплесневение их. При повышении режима тепла до 5—6° С прорастание проходит наиболее дружно. Семена в опытах Степанова не были заранее замочены, что, несомненно, ускорило бы прорастание.

В нашем случае мы имели дело не с целыми семенами, а с изолированными семядолями, лишенными зародышей, где вместо прорастания происходит целый ряд процессов дифференцировки, ведущих к образованию зародыша. Естественно, что при этом температура, как один из факторов, входящих в общий комплекс условий, определяющих эти процессы, имеет другое значение.

Опыты по репродукции зародышей изолированными семядолями подсолнечника после предварительного выдерживания их на холоде были поставлены для выяснения двух вопросов: во-первых, в целях выяснения самого факта возможности стимулирования предварительным охлаждением регенерационных процессов у растительных тканей, во-вторых, в целях выяснения оптимальной продолжительности такого влияния на последующий процесс образования адвентивных зародышей.

Процент новообразований после предварительного выдерживания
изолированных семян на холоде

(Опыты проводились в феврале 1953 и в февр. и марте 1954 г.)

Вариант	Температура	Продолж. воздейств. в днях	% новообр.	Место проведения опытов
I Семена предварит. замачив. в течение 24 ч.	0—4° С	3,5	40	В холодн. помещ.
		4	25	
		5	53	На открыт. воздухе. В снегу
		6	30	
		6	15	
		7	11	
9	21			
II Семена предварит. замачив. в течение 24 ч.	—4—8° С	3	15—23	На открыт. воздухе.
		4	12—17	
		6	24	
III Семена предварит. замачив. в течение 24 ч.	+5° С	7	20	В холодн. помещении. В холодн. помещ. (В темноте.) В холодн. помещении.
		11	49	
		11	11	
IV Семена предварит. замачив. в течение 48 ч.	—4—8° С	2,5	30	На откр. возд. В хол. помещ.
	—13—14° С	3	40	
		7	Только корни	
		8	"	

Оказалось, что достаточно 4—6-дневной «зарядки» на холоде от 0 до —4° С, чтобы получить довольно высокий процент (30—50%) новообразований (таблица I, вар. 1).

Увеличение продолжительности «зарядки» при данной температуре уменьшает процент репродукции зародышей. Семи-девятидневная «зарядка» дает образование только около 20% адвентивных зародышей у изолянтов.

Интересно, что воздействие на изолянты более низкой температурой (от —4 до —8° С), несмотря на их полное промерзание при этом, после осторожного оттаивания и помещения их во влажную камеру с оптимальной положительной температурой, вызывает еще более интенсивное заложение адвентивных зародышей (до 24%, при шестидневном выдерживании на холоде, см. табл. I, вар. II).

«Зарядку» можно давать также температурой выше 0°C , до $+5^{\circ}\text{C}$ (таблица I, вар. III)

При предварительном воздействии температурой ниже -10°C (в нашем опыте -13°C и -14°C) и при более продолжительном времени воздействия (7—8 дней) процесс восстановления остаивается на образовании корней (таблица I, вар. IV). При этом образующиеся корни обычно имеют эндогенное происхождение, являясь как бы продолжением центрального проводящего пучка семядоли, т. е. возникают без участия каллюса. Очевидно, более или менее продолжительное воздействие температурой ниже -10°C вызывает тормозящее влияние на последующие процессы дифференцировки в каллюсе.

Основной причиной торможения является, очевидно, сниженная гидратация клеточных коллоидов, так как главным препятствием набуханию коллоидов, необходимых для дальнейшего развития жизненных процессов, считается продолжительное воздействие низкой температурой.

Полученные нами экспериментальные данные, с предварительным воздействием на культуру растительной ткани низкой температурой, согласуются в известном смысле с аналогичными явлениями, наблюдаемыми у животной ткани, в частности в работе Филатова В. П. (1943) с роговицей глаза. Это и побудило нас принять соответствующие опыты с растительной тканью.

Не безинтересно упомянуть работу Григорьевой В. Г. (1950) с исследованием корней хвоща и морошки, находившихся в течение вегетационного периода в промерзшей почве на глубине 70 см и все же остававшихся жизнеспособными. Автор приводит данные о нахождении в клетках корневых тканей крахмала и лейкопластов и происходящих при этом митозов. Очевидно, в корнях совершался обмен веществ и происходил рост. Те же процессы, очевидно, имеют место и в каллюсе изолированных семядолей, подвергающихся воздействию низких температур.

В последнее время считается доказанным, что при охлаждении семян наблюдается изменение качества ферментов. Например, под влиянием сурового климата холодных зон качественный показатель ферментов растений выше, чем в областях с умеренной температурой. Под влиянием холода имеет место активация ферментов, названных Благовещенским А. В. (1955) биогенными стимуляторами, на чем и базируется приспособление к данным неблагоприятным условиям. Механизм действия биогенных стимуляторов по Благовещенскому сводится к стимулированию ферментных систем растений, к ускорению протекающих в них физиологических процессов.

Весьма вероятно, что те же причины в виде биогенных стимуляторов и в наших опытах приводили к усилению процессов дифференцировки и образования адвентивных зародышей, при предварительном воздействии низкими температурами.

II. Опыты по определению оптимальной влажности при репродукции зародышей изолированными семядолями подсолнечника и гороха

Эксперименты по определению оптимальной относительной влажности были проведены зимой. Изолированные семядоли подсолнечника (тотчас же после операции), посаженные во влажный песок в вегетационные сосуды, ставились в вегетационную камеру, снабженную психрометром. Вычисление процента влажности, как уже было упомянуто в методике, и ее регистрация производились три раза в день. Температура поддерживалась постоянной.

Из опытов выяснилось, что при одной и той же температуре изолированные семядоли подсолнечника образовали при 50—70% влажности до 14% зародышей. Некоторое увеличение образования адвентивных зародышей, наблюдающееся при 70—90% влажности, практически не имеет значения.

Мы пришли к выводу, что высокий процент влажности не является положительным фактором, как это обычно принято считать, однако необходимо, чтобы процент ее при оптимальной температуре превышал 50, что визуально проявляется в виде образования капельножидкой воды на стенках вегетационного сосуда.

Параллельно с опытами на подсолнечнике были поставлены также некоторые опыты с горохом, сорта «Масличный». Выяснилось, что для гороха оптимальной влажностью является 50—70%, при более высокой влажности (80—95%) семядоли гороха очень легко загнивают.

III. Влияние предварительного замачивания семян на репродукцию зародышей изолированными семядолями

Некоторые авторы (Crocke W., 1948, Красносельская-Максимова Т. А., 1929) указывают, что околоплодник и семенная кожура играют большую роль при прорастании семян, особенно у бобовых и других толстопокровных, так как они препятствуют доступу воды к развивающемуся зародышу. Повреждение же покровов вызывает быстрое прорастание.

Другие же авторы не придают большого значения внешним и даже внутренним покровам семян, потому что существуют растения (напр. *Sorbus aucuparia*), семена которых не прорастают после удаления всех покровов без выдерживания в течение определенного времени на холоде.

Влияние предварительного замачивания семян изучала Николаева М. Г. (1948) на семенах различных видов *Ferula* L. Оказалось, что на семена *Ferula songifera* предварительное замачивание действует отрицательно, т. к. задерживает начало прораста-

ния. У другого вида — *Ferula pyramidata* — наоборот, предварительное замачивание вызывает ускорение прорастания. По-видимому, здесь не имеет место какая-то общая закономерность. Во всяком случае, дело не только в том, что оболочки семени препятствуют проникновению в зародыш воды.

В наших опытах семена обычно предварительно замачивались в продолжении 24 часов, после чего оперировались. Замачивание в продолжении 48 часов также не давало отрицательных результатов, но более долгий срок замачивания, в продолжение 3-х или 4-х суток, приводил к торможению последующих регенерационных процессов у изолянтов.

На наш взгляд, это объясняется тем, что при продолжительном предоперационном замачивании семян происходят значительные биохимические изменения веществ в семядолях. При этом следует иметь в виду не только непосредственные питательные вещества, но и вещества гормонального характера, несомненно, имеющие существенное значение при регенерационных процессах. Весьма вероятно, что при продолжительном замачивании семян имеет место вымывание гормональных веществ, поступающих в семядоли из зародыша.

IV. Восстановление изолированными семядолями корней.

Подопытные изолированные семядоли, посаженные в вегетационные сосуды, ставились во влажную камеру при оптимальной температуре и влажности, один вариант в темноте, другой на свету.

Опыты показали, что корнеобразование у изолированных семядолей подсолнечника сорта «Саратовский 169» идет быстрее и лучше в темноте, чем на свету. Об этом сообщается в работах Смита (Smith L., 1907) и Михайлова О. Ф. (1951)

По-видимому, на свету значительная часть запасных веществ в семядолях тратится на образование хлорофилла или хлорофиллогена, который затем фото-химически превращается в хлорофилл.

Регенерация корней изолированными семядолями у многих растений происходит легче, чем получение адвентивных стеблевых почек, на это обстоятельство указывают целый ряд исследователей.

В наших опытах почти стопроцентное образование корней у изолянтов наблюдалось через 5—10 дней после посадки в песок во влажной камере, при температуре 20—25° С и при 50—70% влажности.

Мы отмечали, однако, случаи регенерации стеблевых образований без наличия адвентивных корней или с весьма замедленным образованием последних.

V. Репродукция изолированными семядолями подсолнечника зародышей под влиянием углекислого газа

Мы поставили несколько серий опытов для изучения влияния углекислого газа на репродукцию зародыша изолированными семядолями. Были испытаны следующие концентрации углекислого газа: от 1 до 6% и от 10 до 20%. Результаты опытов воздействия углекислого газа представлены на рис. 1 и 2.

Из рис. 1 видно, что процент новообразований у изолированных семядолей прямо пропорционален продолжительности об-

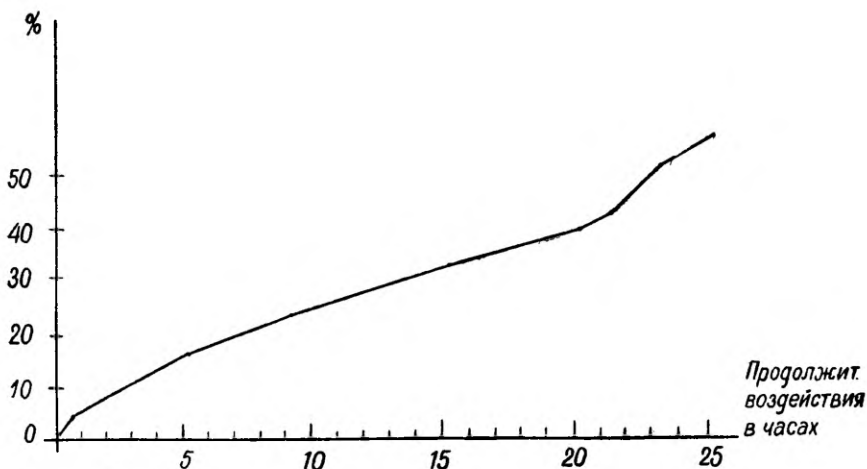


Рис. 1. Процент образования адвентивных зародышей у изолир. семядолей подсолнечника, в зависимости от продолжительности обработки их углекислым газом концентрации от 1 до 6%.

работки их углекислым газом. Наивысший процент новообразований в наших опытах равен 53.

Если брать более высокую концентрацию газа (10—20%), то для получения положительных результатов продолжительность воздействия нужно сократить. Опытные данные показывают, что очень продолжительное воздействие (40—80 ч.) высокой концентрацией CO_2 не увеличивает количества новообразований, оно остается приблизительно тем же, как и при пятичасовом воздействии (рис. 2). Тормозящего регенерационные процессы действия углекислого газа не наблюдалось.

Мы пришли к выводу, что углекислый газ, как один из компонентов внешней среды, оказывает несомненное стимулирующее влияние на процессы восстановления и возобновления в растительных тканях. Воздействие углекислым газом 4—6% концентрации в течение суток, или в продолжении нескольких часов более высокой концентрации, вызывает у изолянтов наибольшее усиление

регенерационных процессов вообще и репродукции целых адвентивных зародышей, в частности.

Это обстоятельство в известной мере согласуется и с общим фи-

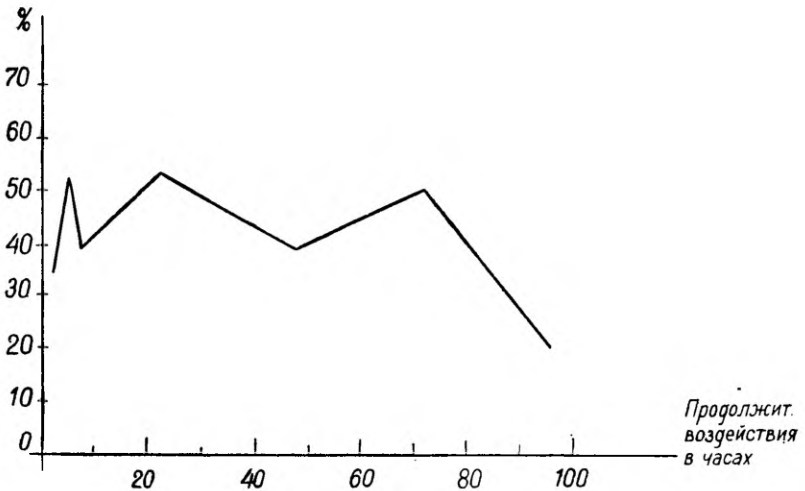


Рис. 2. Процент образования адвентивных зародышей у изолир. семядолей подсолнечника в зависимости от продолжительности обработки их углекислым газом концентрации от 10 до 20%.

зиологическим влиянием CO_2 на растение. По данным Калинина Ф. Л. (1951), содержание углекислого газа ниже 0,03% тормозит, а содержание его от 1 до 10% стимулирует рост растения.

VI. Репродукция зародышей изолированными семядолями подсолнечника под воздействием паров концентрированной серной кислоты

В целях изучения влияния на процессы восстановления и возобновления в растительной ткани ненормальных условий внешней среды, нами были предприняты опыты с воздействием на изолянты паров концентрированной серной кислоты. Вопреки ожиданиям, воздействие таким необычным фактором привело к весьма положительным результатам. Как видно из таблицы 2, при определенных условиях число адвентивных зародышей в изолянтах достигает 70%.

В опытах по воздействию паров концентрированной серной кислоты на культивируемые семядоли, последние помещались в чашки Петри с влажным песком и устанавливались в эксикаторы, на дне которых ставился маленький сосуд с концентрированной серной кислотой.

Полученные нами результаты этих опытов представляют несомненный интерес и, как нам кажется, при дальнейшем анализе

их, будут способствовать разрешению некоторых вопросов о причинах и побудителях регенерационных процессов у растений. Можно предполагать, что в опытах с воздействием на изолянты паров серной кислоты имело место весьма сильное нарушение нормальных физиологических отправления исследуемой ткани ра-

Таблица 2

Репродукция зародышей изолированными семядолями под воздействием паров концентрированной серной кислоты

Число подопытн. экзempl.	Число часов замачив. семян	Воздейств. паров кислоты в часах	Процент новообразований
20	24	18	70
20	48	16	25
20	24	46	30
10	24	48	40
25	24	0,5	40
25	24	1	36

стения. Весьма вероятно и наличие разрушения и смерти целых групп клеток на месте среза. Все это, по мнению некоторых исследователей, вызывает образование веществ гормонального характера, в свою очередь способствующих регенерационным процессам. Мы, однако, воздерживаемся от каких-либо окончательных выводов в этом отношении.

Выводы

1. Культивирование изолированной от зародыша семядоли в специальных условиях вызывает образование каллюсной ткани и последующую дифференцировку в ней адвентивных органов и целого организма растения.

2. Оптимальной температурой для адвентивных образований в культуре семядольного каллюса исходного сорта подсолнечника является 20—25° С.

3. Оптимальной температурой для предварительного стимулирующего воздействия холодом является температура от +5° до -5° С.

4. Оптимальная влажность лежит в пределах от 50—70%.

5. Фактор света, оказывающий стимулирующее влияние на образование адвентивной стеблевой почки, вызывает угнетающее

действие при формировании адвентивных корней. Оптимальным условием в этом отношении является темнота.

6. Воздействие на культуру каллюса углекислого газа показало стимулирующее влияние последнего на процесс дифференцировки адвентивных органов. Лучшие результаты стимулирующего влияния углекислого газа имеют место при концентрации его от 4 до 6%, при продолжительности воздействия в течение суток — или при концентрации от 10 до 20% в течение нескольких часов.

7 Некоторые необычные реагенты, как например, в нашем случае — пары концентрированной серной кислоты, вызывают ряд нарушений структурного и физиологического характера, приводящих к стимулированию регенерационных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

- Благовещенский, А. В. Биогенные стимуляторы в сельском хозяйстве. Природа, № 7, 1955.
- Григорьева, В. Г. О накоплении крахмала в корнях, обнаруживаемых в мерзлой почве. Докл. АН СССР т. LXXII, № 6, 1950.
- Дунин, М. и Кузнецова, А. Регенерационная способность семядолей и ее значение. Семеноводство, № 4, 1933.
- Завадский, К. М. О внутриклеточном возникновении меристематических клеток и путях формирования побегов новообразований у бегонии. Докл. АН СССР, т. LXXIX, № 1, 1951.
- Калинин, Ф. Л. Культура изолированных зародышей как возможный путь изменения природы растений. Труды института физиол. раст. им. К. А. Тимирязева, т. VII, в. 2, 1951.
- Красносельская Максимова, Т. А. Новые данные по физиологии прорастания семян. Достижен. и перспект. в обл. прикл. бот., ген. и сел., 1929.
- Михайлов, О. Ф. Морфогенез новообразований подсолнечника и гороха, полученных на изолированных семядолях. Ученые записки ЛГУ, № 139, сер. биол. наук, вып. 26, 1951.
- Михайлов, О. Ф. Биологическая специфика семядолей в семенах растений, не сохраняющих эндосперм. Научн. Труды, посвященные 150-летию ТГУ, 1952.
- Набоких, А. К вопросу о раздражителях роста. Эксп. этюды, Одесса 1908.
- Николаева, М. Г. К биологии прорастания семян некоторых видов *Festuca L.* Эксперим. ботаника, Ленинград 1948.
- Степанов, В. Н. Минимальная температура для прорастания семян и появления всходов полевых культур. Селект. и семенов., I, 1948.
- Уайт, Ф. Р. Культура растительных тканей. Изд.-во Иностран. лит., Москва 1949.
- Филатов, В. П. Тканевая терапия, Одесса 1943.
- Флеров, А. Ф. и Флеров, В. А. О выращивании растений из отделенных от зародышей семядолей (котилегения). Докл. АН СССР, Новая серия, т. 60, № 8, 1948.
- Холодный, Н. Г. Гормонизация растений. Природа, № 2, 1937.
- Цабель, Н. Е. Сперматология или учение о семенах. Часть I, Москва 1882.
- Wopnet, Ch. Untersuchungen über den Nutzen der Blätter bei den Pflanzen. LXXXIX. Verlegt von Winterschmidt in Nürnberg, 1779.
- Wlościszewski, Th. Physiologische Untersuchungen über die Keimung u. weitere Entwicklung einiger Samentheile bedecktsamiger Pflanzen. Landwirtsch. Jahrbuch, Bd. V, 1876.

- Crocker, W. Growth of plants. Изд. Иностр. лит., Москва 1948.
- Goebel, K. Über Regeneration im Pflanzenreich. Biol. Zbl. 22, 1902.
- Fuja, M. C. On the Formation and Development of Roots and Shoots on the Isolated Cotyledons of Cucurbita, Cucumis and Lupinus. Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences, Sér. B. 1, Cracovie, 1929.
- Kowalewska, Z. Über Sprossregenerate an isolierten Keimblättern von Bohnen u. Erbsen. Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences, Sér. B., Cracovie, 1927—28.
- Küster, E. Beobachtungen über Regenerationserscheinungen an Pflanzen. Beischrift zum Botanisch. Centralblatt, Bd. XIV, 1903.
- Lindenmuth, H. Weitere Mitteilungen über regenerative Wurzel u. Sprossbildungen auf Laubblättern. Gartenflora. 1903.
- Popoff, M. Über theoretische Fragen der Zellstimulation. Z. Stimulationsforsch., 2, 1926.
- Priestley, J. H. and Swingle, C. F. Vegetative propagation from the standpoint of plant anatomy. Tech. Bull., 151. U. S. 1929.
- Smith, L. Beobachtungen über Regeneration u. Wachstum an isolierten Teilen von Pflanzenembryonen. 1907.
- Stoll, R. Callusbildungen an Stecklingen. Bot. Z., № 46, 1874.
- Trécul, M. Accroissement des végétaux dicotylédones ligneux, reproduction du bois et de l'écorce par le bois décortiqué. Annales des Scienc. Natur. bot., III, 1853.
- Van Tieghem, Ph. Recherches Physiologiques sur le Germination. Annales des Sciences Naturelles, Sér. 5. T. XVII, 1873.
- Winkler, H. Über regenerative Sprossbildungen auf den Blättern von Torenia asiatica. Ber. d. deutschen bot. Ges. 21, 1903.
- Vöchting, H. Untersuchungen zur experimentellen Anatomie und Pathologie des Pflanzenkörpers. Tübingen 1908.

UUDIKMOODUSTISTE SAAMINE ISOLEERITUD IDULEHTEDE KALLUSEST

Biol. tead. kand. E. Piiper

Geneetika ja darvinismi kateeder

Resümee

Töö ülesandeks oli välja selgitada mõningaid välistingimusi, mis võiksid hõlbustada uudikmoodustiste kultiveerimist päevalille isoleeritud idulehtede kallusest. Lähtematerjaliks kasutati päevalille (*Helianthus annuus L.*) sordi „Saratovski 169” ja ka mõningates katsetes herne (*Pisum sativum L.*) sordi „Maslitšnõi” seemneid. Katsed teostati laboratoorses tingimustes. Optimaalse temperatuuri määramiseks teostati kahesuguseid katseid: isoleeritud idulehtedega 10—30°C temperatuuris ja eelkülmutuse teel „virgutatud” isolantidega +5—14°C temperatuuris kas külmades ruumides või looduslikes tingimustes: vabas õhus või lumehanges. Pärast seda asetati katsenõud isolantidega vegetatsioonikambrisse. Stimulaatoreist kasutati süsihappegaasi ja väävelhappe aursid.

Ülalmainitud katsete põhjal on võimalik teha järgmisi järeldusi:

1. Lootest isoleeritud idulehe kultiveerimisel erilistes tingimustes tekib kalluskude, sellest diferentseeruvad adventiivsed organid ja lõpuks kogu taimorganism tervikuna — uudikmoodustis.

2. Optimaalseks temperatuuriks adventiivsete moodustiste tekkel päevalille lähtesordi idulehe kalluse kultuurist on 20—25°C.

3. Optimaalseiks eelkülmutustemperatuuri piirideks uudikmoodustiste saamiseks on +5° kuni —5° C.

4. Optimaalseiks õhuniiskuse piirideks uudikmoodustiste saamiseks on 50—70%.

5. Valgus, avaldades stimuleerivat mõju adventiivse varrepunga tekkele, pidurdab adventiivse juure arengut. Optimaalseks tingimuseks viimase tekkeks on pimedus.

6. Mõjustades kalluse kultuuri süsihappegaasiga selgus, et see avaldab stimuleerivat mõju adventiivsete organite diferentseerumi-

sel. Parimaid resultaate saadi stimuleerimisel süsihappegaasiga 4—6% kontsentratsioonis 24 tunni vältel või 10—20% kontsentratsioonis mõne tunni vältel.

7. Mõned ebatavalistest reagentidest, nagu näiteks antud juhul küllastatud väävelhappe aurud, kutsuvad esile nii struktuurseid kui ka füsioloogilisi häireid ja mõjuvad stimuleerivalt regeneratsiooni-protssidele.

МЕТОД КУЛЬТУРЫ ТКАНЕЙ И ПОЛУЧЕНИЕ НОВЫХ ФОРМ РАСТЕНИЙ

Доц., канд. биол. наук О. Михайлов

Кафедра генетики и дарвинизма

В настоящее время метод культуры тканей приобретает все большую и большую популярность среди биологов самых различных специальностей и профилей. Не являясь новинкой, этот метод, однако, находится в большой зависимости от состояния лабораторной техники, чем и объясняется его сравнительно медленное распространение. Вместе с тем, этот метод раскрывает весьма большие и заманчивые возможности для выяснения целого ряда вопросов как в онтогенетическом, так и филогенетическом плане. Способствуя разрешению таких проблем, как регенерация, трансплантация и тератология, метод культуры тканей позволяет вплотную подойти к самым интимным процессам морфогенеза органов, выяснение которых, в свою очередь, способствует устранению пробелов в области эволюционной морфологии.

Биологическая специфика растительных организмов обусловила значительно более позднее применение этого метода к ним, чем у животных. Если культивирование изолированных тканей и органов животных производилось уже во второй половине XIX столетия, то систематическое изучение культуры растительной ткани фактически началось только в 30-х годах XX века. Следует отметить, однако, что сам термин «культура тканей» носит собирательный характер, т. к. объединяет собой не только культивирование отдельной ткани или группы однородных клеток, но и культивирование частей или целых органов и даже целых систем последних, изолированных от организма. Наибольшую сложность представляет культивирование обособленной ткани, что объясняется следующими причинами. В отличие от животных клеток, растительные клетки обычно питаются путем диффузии питательных веществ из соседних клеток. Это обстоятельство весьма затрудняет правильный качественный подбор питательной среды для культуры. Кроме того, наличие в растительных клетках плотной оболочки затрудняет поступление в них питательных веществ из искусственно созданной среды. Наконец, ко всему этому присово-

купаются еще и особенности ростовых процессов у растений, обусловленные наличием зон или точек роста, что не имеет места в животных тканях. Все это и послужило препятствием для широкого распространения и применения этого ценного метода при изучении растительных организмов.

Значительно проще осуществляется культивирование целого органа или его части, что не снижает, однако, ценности получаемых результатов. И в этом случае, в результате образования на изолированном органе гомогенного каллюса, возникает возможность, при определенных условиях, его дифференцировки и образования новых тканей, проводящей системы, адвентивных органов и даже целого зародыша.

Однако метод культуры тканей, при всех его положительных качествах и широких возможностях, требует весьма осторожной оценки получаемых результатов и правильного методологического подхода.

Большинство зарубежных исследователей, применяя метод культуры тканей для изучения формообразовательных или физиологических процессов в отдельных органах, тканях и клетках, не всегда учитывает целостность организма, единство последнего с условиями существования и исторически сложившиеся приспособительные особенности любой части организма, начиная от целого органа и кончая клеткой. В большинстве случаев изолированный орган или ткань изучаются вне всякой зависимости от остальных частей организма, в отрыве от него, как простой механический компонент целого. Примером таких исследований могут служить работы Пирсэлл и Пристли (Pearsall W. H. and Priestley J. H. 1923), Пристли (Priestley J. H. 1928, 1930), которые сводят, в частности, причины образования из камбия радиально симметричных органов растений к действию радиального градиента концентрации водородных ионов. К этой же категории относятся работы Лунда (Lund E. I. 1931). Розина и Лунда (Rosene H. F. and Lund E. I. 1935) и, наконец, работы, одного из крупнейших специалистов в области культуры растительной ткани, Уайта (White F. R. 1939, 1949). Последний связывает образование стеблей и листьев в недифференцированной культуре каллюса с наличием кислородного градиента. Можно привести довольно большой список авторов, исследования которых подобны вышеуказанным. Подавляющее большинство из них, исходя из неверных теоретических представлений о развитии растительных организмов, пытаются изучать дифференцировку органов и тканей с позиций механицизма и, в конце концов, приходят к идеализму. Последнее обстоятельство хорошо иллюстрируется на примере работ Уайта. В его книге «Культура растительных тканей» (Уайт Ф. Р., 1949) много внимания уделяется вопросам изучения морфогенеза органов и дифференцировки клеток с позиций механистической теории градиентов концентраций различных веществ и полумеханистической-полуидеалистической гормональной теории, в одинаковой

мере приводящих к вейсманистской трактовке процесса формообразования, определяемого «внутренними» причинами. При этом совершенно не принимается во внимание самое главное, а именно условия развития организма и его органов в процессе их исторического обособления.

История науки показывает, что впервые форму и строение отдельных органов растения, в тесной связи со свойствами живой материи и изменениями условий ее существования, позволила рассмотреть эволюционная теория Ч. Дарвина. Такого рода подход к изучению организма, и, в частности, растения, оказался возможным потому, что фактически теория Ч. Дарвина исходила из материалистического принципа — единства организма с теми элементами среды обитания, которые составляют условия его существования. И хотя сам Ч. Дарвин не приводил подобных формулировок, из сущности его теории следует, что организм не может существовать вне условий внешней среды, к которым приспособлена вся система его органов и продуктом которых последние, фактически, и являются.

Однако теория Ч. Дарвина, как известно, обладала рядом существенных недостатков, к числу которых, прежде всего, относится ее созерцательный, констатирующий характер. Учение Ч. Дарвина, объясняя некоторые важнейшие законы и закономерности живой природы, еще не являлось оружием для сознательной перестройки последней. Тем не менее, именно учение Ч. Дарвина, завершив собой т. н. «классический» этап в развитии биологической мысли, послужило мощным толчком для поисков способов и путей сознательного управления закономерностями органического мира. Последарвиновский период характеризуется бурным развитием экспериментальных исследований, в частности, в области морфологии и морфогенеза растений. Особенно сильное развитие это направление получило в России. В России же возник и новый термин — «экспериментальная морфология», который принадлежит Тимирязеву. Ему же принадлежат и знаменательные слова о том, что «форма несомненно начинает признавать над собой нашу власть и подчиняться нашим экспериментальным методам. Рядом с физиологией процессов уже начинается физиология форм; рядом с экспериментальной физиологией возникает экспериментальная морфология». Однако дальше Тимирязев (1890) продолжает несколько пессимистически: «Это новое течение науки едва пробивается одиночными струйками и сольется в широкий поток, вероятно, только за порогом века».

Прогрессивные материалистические идеи в области морфологии растительных организмов высказывались еще и до Тимирязева, например, основателем русской морфологии растений, учителем Тимирязева, Бекетовым А. Н. (1862) и рядом других крупных исследователей. Однако до Тимирязева работы по экспериментальной морфологии носили еще эпизодический характер и не представляли собой самостоятельного направления.

Новым, качественно высшим этапом развития морфологии и морфогенеза растений оказался мичуринский период развития биологии. Этот период характеризуется не простым продолжением дарвиновских традиций, а творческим развитием их. В отличие от прошлых этапов развития биологических знаний, мичуринская биология сознательно основывается на принципах диалектического материализма и активно использует объективные законы и закономерности развития органической материи, в целях преобразования и улучшения природы организмов, в целях создания новых форм. Порожденное самим ходом развития нашей страны, запросами социалистического сельского хозяйства, мичуринское учение базируется и на новых методах исследования.

Творчески развивая теорию Ч. Дарвина, И. В. Мичурин и его последователи создали материалистическое учение о закономерностях строения и процессах формообразования у растений в их онтогенетическом и филогенетическом развитии. Это учение, исходя из своего основного принципа материалистического развития — единства организма с условиями его существования, рассматривает различные части и органы растения в тесной связи и взаимозависимости друг с другом и со всем организмом в целом, с обязательным учетом всех его основных, исторически сложившихся, приспособительных свойств.

Раскрытие закономерностей строения и процессов формообразования у растений, а также изучение причин, определяющих размер, форму, структурные особенности и сам процесс развития частей и органов, тесным образом связаны со стадийными изменениями организма. Однако вследствие того, что условия, необходимые для прохождения растением определенных стадий развития, и условия, необходимые для образования и развития органов, не всегда совпадают, один и тот же фактор внешней среды, или их комплекс, может оказывать различное влияние на процесс органогенеза. Побудители и характер протекания органогенеза, таким образом, могут меняться в зависимости от того, на какой стадии развития находится растение. С другой стороны, вследствие наличия объективного закона взаимной обусловленности формы и функции, наиболее благоприятные для роста и развития внешние условия обычно совпадают с теми условиями, которые обеспечивают функциональную деятельность органа. Отсюда следует, что условия, благоприятствующие выполнению его функции, могут быть благоприятными и для его морфогенеза.

Так как растительный организм представляет собой единое биологическое целое и функции его отдельных частей или органов находятся в тесной связи и взаимозависимости друг с другом, то такая же взаимная связь или корреляция имеет место и между развивающимися органами. Иными словами, заложение и развитие одних органов растения зависит от функциональной деятельности и развития других его органов и частей.

Рост и развитие органов и связанная с этим ранняя диффе-

ренцировка проводящих путей требуют постоянного притока определенных пластических веществ, минеральных солей и воды. Наличие этого комплекса, в известном смысле, обуславливает процесс органогенеза. Зная закономерности распределения в организме питательных веществ, условия питания развивающегося органа, можно, по сути дела, управлять развитием, а еще раньше — процессом его заложения. Однако при этом следует учитывать, что органогенез у растений зависит также от соотношения темпов роста каждого органа в разных направлениях и что влияние внешних условий на образование органов осуществляется через посредство изменения соотношения темпов роста и темпов стадийного развития.

Все вышеизложенное в значительной степени определяет возможности, которыми обладает метод культуры тканей, при использовании последнего в целях выяснения закономерностей морфогенеза органов растения. Естественно, что изучение морфофизиологических процессов в изолированной от организма ткани, органе или даже системе органов не представляет собой универсального средства для выяснения основных проблем онто- и филогенетики. Тем не менее, многие вопросы, относящиеся к этой области, могут быть поставлены и решены этим методом, при условии правильного методологического подхода. Возможности метода культуры ткани, однако, могут быть весьма расширены, если этот метод используется как способ получения адвентивных зародышей, процесс заложения которых и последующее развитие представляют собой интерес и значение, не вызывающие сомнения.

Задача выяснения закономерностей формообразовательного процесса и управления последним решается современной материалистической биологией различными путями. Однако все они основываются на общих теоретических положениях мичуринского учения и прежде всего на его основном принципе, рассматривающем организм в диалектическом единстве с условиями его жизни.

Известно, что организм обладает избирательным отношением к условиям внешней среды. Эта способность организма вступать в определенные взаимоотношения лишь с теми элементами среды, которые больше всего соответствуют его природе, объясняется тем, что у каждого вида организма в процессе филогенеза выработался совершенно определенный тип обмена веществ и, следовательно, определенный тип наследственной основы. Онтогенез потомства, протекающий в более или менее сходных с родительскими организмами условиях, способствует все большему закреплению из поколений в поколение типа ассимиляции-диссимиляции, типа наследственности или природы данного вида живых существ. Вырабатывающийся таким образом известный консерватизм наследственности, наряду со свойством изменчивости, является одной из характерных особенностей живого тела.

Мичуринским учением установлено, что для направленного изменения природы растительного организма, следовательно, и для

направленного изменения формы, структуры, функции необходимо изменить тип обмена веществ. Иными словами, необходимо изменить характер взаимоотношений организма с внешней средой. Однако, вследствие того, что организмы обладают иной раз весьма значительным консерватизмом наследственности, установлению нового типа ассимиляции-диссимиляции должна предшествовать ликвидация старой наследственности либо ослабление ее консерватизма.

Ослабление консерватизма наследственности, расшатывание наследственной основы организма делает его значительно более пластичным, податливым к последующим воздействиям условиями воспитания.

Расшатывание старой наследственности осуществляется различными способами. Из них важнейшими являются: воздействия в определенные моменты развития условиями внешней среды и половая или вегетативная гибридизация. Оба эти метода хорошо известны и достаточно широко используются. Однако существует еще один способ, на наш взгляд, заслуживающий особого внимания, а именно получение адвентивных зародышей в культуре ткани или изолированного органа растения.

Как показали наши исследования (Михайлов О. Ф. 1951, 1952), метод культуры ткани, в данном случае, раскрывает еще одну интересную и важную возможность. Помимо удобства изучения органогеनेза у адвентивных зародышей, последние, вследствие филогенетически необычного способа образования оказываются носителями расшатанной наследственной основы и потому являются весьма пластичными при последующем воздействии условиями воспитания. Выращенные из адвентивных зародышей растения-новообразования оказываются, таким образом, весьма удобным объектом для самых разнообразных исследований в онтогенетическом и филогенетическом плане.

Вследствие вышеизложенных особенностей питания и других биологических свойств растительной ткани, культивирование последней в изолированном виде вызывает ряд технических затруднений, особенно, при подборе питательных сред. Учитывая это обстоятельство, мы использовали в качестве изолянтов, при культивировании которых происходит образование адвентивных зародышей, органы, обладающие большим запасом естественных питательных веществ. Такими органами являются прежде всего семядоли семян, не сохраняющих при созревании эндосперм.

Как известно, семена целого ряда высших растений в процессе своего созревания не сохраняют эндосперм. Вместо эндосперма, представляющего собой образование богатое «особого рода» питательными веществами, у семян некоторых растений, например бобовых и сложноцветных, накопление этих веществ происходит в семядолях.

Как было показано Презентом И. И. (1948) и Модилевским Я. С. (1950) на эндосперме и Михайловым О. Ф. (1952) на

семядолях безэндосперменных семян, питательные вещества, сосредоточенные в этих органах, выполняют особую биологическую функцию своего рода ментора на первых порах развития молодого растения.

Биологическая специфика семядолей и, следовательно, питательных веществ, сосредоточенных в них, заключается, на наш взгляд, в том, что:

Во-первых, они представляют собой комплекс таких веществ, которые обособились в процессе всей истории данного вида (сорта).

Во-вторых, эти вещества, используемые развивающимся растением в начальных этапах онтогенеза, обуславливают развитие видовых (сортовых) признаков организма.

В-третьих, эти вещества в процессе их использования зародышем не остаются неизменными. Будучи сосредоточены в живых клетках, они находятся в состоянии непрерывных изменений и превращений в результате жизнедеятельности этих клеток, в свою очередь связанной самым тесным образом с жизненными отправлениями и ходом развития зародыша. Последнее обстоятельство, повидимому, способствует тому, что молодое растение в начальный момент его развития, вместе со свойством устойчивости против неблагоприятных воздействий внешней среды, обладает известной лабильностью.

Наряду со всеми этими особенностями семядолей безэндосперменных семян, оказалось, что клетки их обладают большими потенциальными возможностями. На изолированной от зародыша семядоле, при воспитании ее в соответствующих условиях как культуры ткани, на месте среза происходит образование гомогенной каллюсной ткани, способной к последующей дифференцировке и образованию отдельных органов или целого адвентивного зародыша.

Изучение процесса образования первичных каллюсных клеток на срезах изолированных семядолей, проводимое в нашей лаборатории Л. М. Поска-Тейсс и Э. О. Пийпер (работы готовятся к опубликованию), пока еще не позволяет сделать какой-либо окончательный вывод о его механизме. Однако картина этого процесса, несомненно, становится более ясной. На наших объектах образование первичного каллюса происходит не только на месте поранения, но и в тесной зависимости от тех явлений, которые наблюдаются после разрушения на этом месте клеток.

В нашей более ранней работе (Михайлов О. Ф. 1952) мы предполагали, что наличие у адвентивных зародышей и выращиваемых из них растений-новообразований расшатанной наследственности, неустойчивости типа обмена веществ, является в известной мере следствием новообразования первичных клеток каллюса. В настоящее время мы склонны предполагать иное происхождение этого свойства, продолжающего, однако, оставаться в тесной связи с протоплазматическим веществом разрушенных клеток.

Анализ образования первичного каллюса показывает, что этот процесс, обусловливаемый целым комплексом обстоятельств, находится в большой зависимости от наблюдающейся после поранения дегенерации клеток и клеточных элементов. Иными словами, в данном случае продукты разрушения клеток, наряду с другими факторами, выступают не только в качестве побудителей процессов деления неповрежденных клеток меристематических очагов в семядоле, но и обусловливают последующие регенерационные явления и связанные с ними процессы дифференцировки.

Даже поверхностный гистологический анализ места поранения (среза) у семядоли показывает, что образующаяся первоначально на срезе макроскопически видимая пленка не представляет собой только продукт разрушенных клеток, а включает в себя иной раз несколько слоев не поврежденных, но дегенерированных клеток. Мы склонны предположить, что при этом имеет место явление не только дегенерации, но и дезинтеграции, подобно тому, как это отмечается Навашиным М. С., Герасимовой-Навашиной Е. Н. и Яковлевым М. С. (1952) при формировании воспроизводящих элементов растений. Согласно весьма убедительным показаниям этих авторов, процессы, происходящие в тканях, в которых имеет место формирование зародышевого мешка и пыльцевых зерен, связаны с разрушением их окружения и с поглощением ими протоплазматического вещества, образовавшегося при этом разрушении. Мы совершенно согласны при этом с мнением этих авторов, что в подобных случаях имеет место не простое «потребление» клетками продуктов распада, а нечто напоминающее взаимоассимиляцию, происходящую при оплодотворении. Такая концепция нам кажется применимой и к нашим случаям и является более правдоподобной, чем те объяснения, которые дает процессам регенерации теория некрогормонов Таберландта.

Наблюдения, сделанные нашими сотрудниками Л. М. Поска-Тейсс и Э. О. Пийпер, показывают, что последующий процесс образования качественно отличных клеток каллюса, по-видимому, всегда начинается с митотического деления как клеток меристематических очагов и тяжей, находящихся в той или иной стадии дифференциации в паренхиме семядолей, так и клеток, находящихся в непосредственном соседстве с ними. При этом имеют место отдельные случаи несколько необычных форм деления, приближающихся к тем, которые получили название «рубцевания», которые несколько позже увеличиваются в числе и становятся преобладающими.

В последнее время некоторыми авторами, например Завадским К. М. (1951, 1953), Глущенко И. Е., Элленгорн Я. Е., Афанасьевой А. С., Жиронкиным И. М. (1953) и др., отмечаются случаи «дробления» клетки, рассматриваемые как чуть ли не единственно возможная форма образования адвентивного зародыша.

Не вдаваясь в полемику по поводу справедливости последнего

утверждения, мы не отрицаем, однако, возможность и такой формы заложения зародыша в каллюсе, подтверждением чему являются, например, аналогичные примеры в ряде случаев апомиксиса, в частности, образование апогамных и нуцеллярных зародышей, как следствие несопровождающегося половым процессом дробления синергид, антипод или отдельных клеток нуцеллуса.

По мнению автора настоящей статьи, заложение зародыша новообразования, по-видимому, происходит следующим образом.

После образования первичного каллюса, представляющего собой однородное образование, состоящее из более или менее хаотически расположенных клеток паренхимного типа, уже через несколько дней начинается его дифференциация. Процесс дифференцировки первичного каллюса выражается в расчленении ткани каллюса на паренхиматические и меристематические элементы. По своему внешнему виду каллюсная меристема ничем не отличается от васкулярной меристемы в мякоти семядолей.

Образующиеся в каллюсе очаги меристемы обыкновенно обособляются в более глубоких слоях последнего, однако, отмечены случаи и очень близкого заложения их к поверхности. Впоследствии между отдельными меристематическими очагами каллюса наблюдается образование перемычек, соединяющихся с меристематическими тяжами тела семядоли. Одновременно с этим идет процесс дальнейшей дифференцировки меристематических тяжей каллюса, ведущей к образованию сосудистой системы. Приблизительно на 8—10 день от начала культивирования

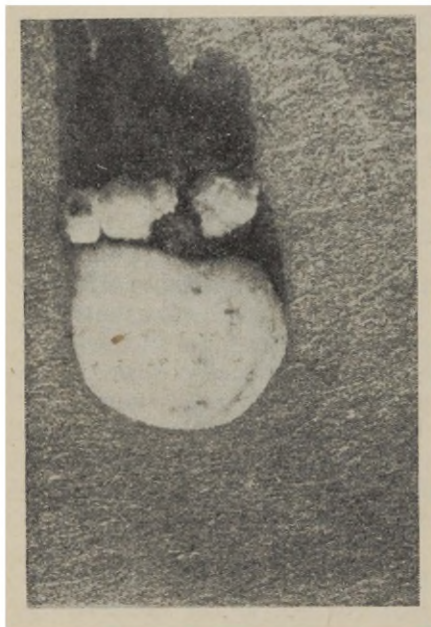


Рис. 1. Сферически правильные шарообразные выросты в каллюсе изолированной семядоли гороха.

на вершинах меристематических тяжей, уже имеющих клубки трахеид, можно обнаружить зачатки корней, которые затем очень быстро растут, прорывают ткань каллюса и появляются на его поверхности. Обычно несколько позже после заложения корней начинается образование стеблевой точки роста.

Процесс новообразования в каллюсе изолированной семядоли, однако, весьма часто останавливается на образовании только корней или, в редких случаях, только стеблевой почки. Иногда имеет

место возникновения в каллусе отдельных листовидных образований, или, пока еще не понятных, нескольких правильных шарообразных выростов, соединяющихся с основной массой каллуса тоненькой ножкой (рис. 1).

Изучение вышеизложенных процессов заложения и развития адвентивных образований, органов и целых зародышей, при условии учета ранее упомянутых обстоятельств, на наш взгляд, представляет собой большой интерес и оправдывает применение ме-



Рис. 2. Часто встречающийся у растений-новообразований подсолнечника случай тройного срастания корзинок.

тода культуры ткани в разрешении ряда вопросов органогенеза растений.

Вопросы детерминации размера, формы, строения, развития и функции как отдельных частей, так и всего организма в целом имеют прямое отношение к проблеме получения новых форм растений. Вместе с тем, все эти вопросы могут найти ту или иную степень своего разрешения при использовании метода культуры тканей и органов. Особый интерес в этом плане представляют получаемые с помощью этого метода растения-новообразования.

Не останавливаясь на подробном описании разнообразных морфофизиологических и биологических отклонений, имеющих место у растений адвентивного происхождения, т. к. об этом мы

уже писали в других работах, отметим следующее. Благодаря сильно выраженной пластичности этих растений, являющейся следствием расшатанности наследственности и проявляющейся особенно резко в начальных фазах развития, имеют место два вида морфофизиологических и биологических отклонений по срав-



Рис. 3. Случай образования большого числа мелких корзинок, сосредоточенных в одном общем пучке на вершине стебля.

нению с обычными растениями, выращенными из целых семян. Это, во-первых, всякого рода случаи тератологического характера и, во-вторых, случаи ослабления или усиления ранее существовавших у родительских форм признаков и свойств. Оба эти типа отклонений от исходных форм в ряде проверенных случаев имеют наследственный характер. Не вдаваясь в подробный анализ природы описываемых явлений, приведем некоторые примеры, ограничиваясь в данной статье только одним объектом исследования, а именно растениями-новообразованиями подсолнечника. Как и следовало ожидать, наиболее сильные отклонения от нормы у растений-новообразований проявились в области генеративных орга-

нов. Нами отмечено весьма большое количество случаев патологических и непатологических изменений органов воспроизведения.

Сравнительно часто у растений-новообразований, особенно нулевого поколения, среди трубчатых цветков в центральной части корзинки имеет место образование краевых язычковых цветков



Рис. 4. Развитие корзинки в виде не имеющего определенной структуры и формы образования.

или, наоборот, полное или частичное отсутствие последних на периферии.

Часто цветочные корзинки представляют собой систему из сросшихся вместе двух или трех, но не больше, соцветий (рис. 2). В некоторых случаях наблюдалось образование большого числа корзинок соцветий, собранных в один общий пучок на верхушке стебля (рис. 3).

За исключением последнего факта, описанные отклонения

встречаются иногда и у нормальных растений подсолнечника, например по данным Кренке Н. П. (1950), однако, в наших условиях за четыре вегетационных сезона мы этого не наблюдали.

Все эти случаи, несомненно, являются показателями формообразовательного процесса и представляют собой одну из возможностей выяснения вопроса об образовании соцветия данного типа.

Большой интерес, на наш взгляд, представляют такие терато-



Рис. 5. Случай образования корзинки, у которой вместо трубчатых цветков образовался комплекс листоподобных выростов.

логические образования цветочных корзинок, у которых вообще отсутствуют как трубчатые, так и язычковые цветки. В этих случаях корзинка развивается в виде не имеющего определенной структуры и формы образования (рис. 4), или, сохраняя более или менее обычную внешнюю форму, представляет собой какой-то комплекс листоподобных выростов, напоминающих в целом явление своеобразной пролификации (рис. 5).

Большой интерес, в том числе и практический, представляют собой анатомические и, в связи с этим, морфологические особенности корзинки подсолнечника, т. к. они определяют в конечном счете возможности продуктивности и урожая. Проведенные в этом плане исследования Морозова В. К. (1953) показывают, что цветки периферической части корзинки снабжаются водой и питательными веществами гораздо лучше цветков срединной зоны. Это обуславливается анатомическими особенностями корзинки и

в первую очередь расположением сосудисто-проводящей системы.

В наших опытах с растениями-новообразованиями подсолнечника мы получали корзинки самой разнообразной формы, в том числе и такие, которые в наибольшей степени обеспечивают равномерное распределение питательных веществ и влаги (рис. 6).



Рис. 6. Форма корзинки, которая по своему анатомическому строению наилучшим образом обеспечивает водоснабжение семян.

К числу патологических отклонений мы относим наблюдавшееся нами в ряде случаев явление альбинизма семян, коррелирующееся в известном смысле с некоторыми другими признаками и свойствами у новообразований подсолнечника (рис. 7).

Наряду с некоторыми патологическими отклонениями в развитии семян следует важное в практическом отношении явление

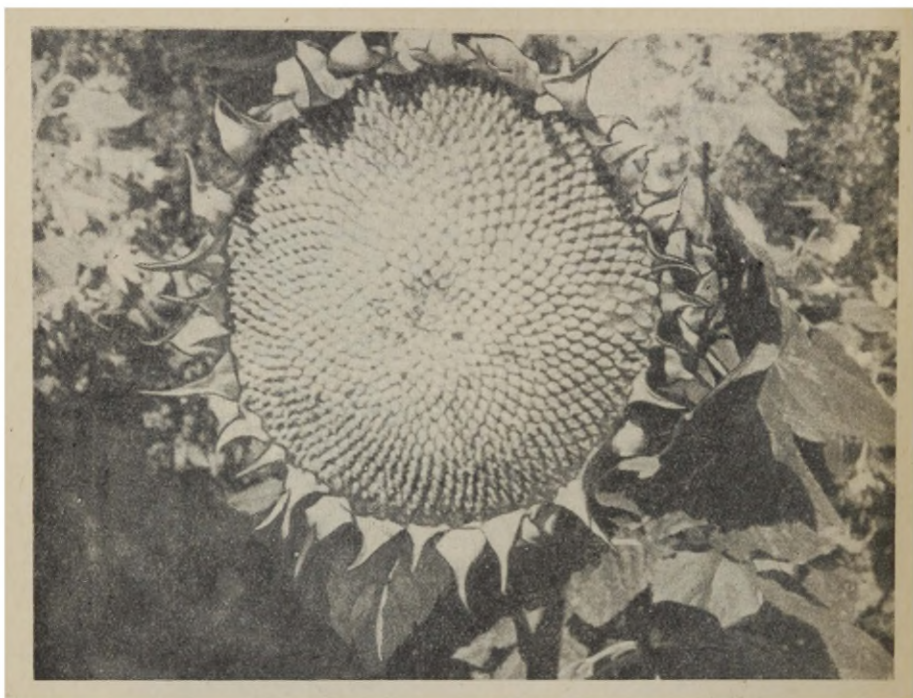


Рис. 7. Случай альбинизма семян у подсолнечника-новообразования.

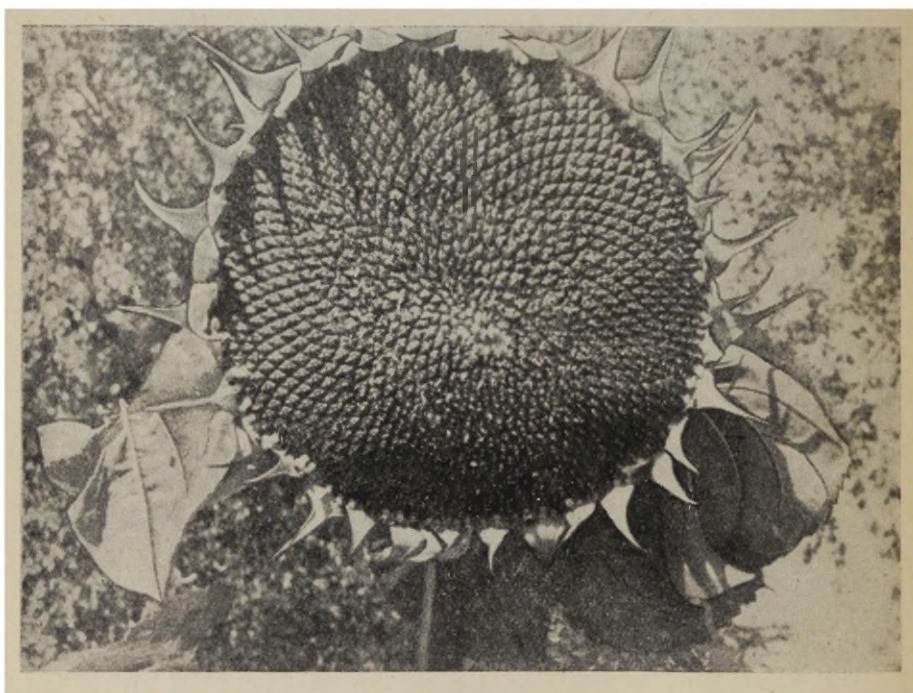


Рис. 8. Пример мощного развития корзинки и семян у растения — новообразования подсолнечника.

своеобразного «гетерозиса», имеющего место у новообразований подсолнечника первого семенного поколения и заметно не снижающегося в наших опытах до четвертого поколения включительно. Корзинки ряда полученных нами форм растений отличались весьма большим диаметром, обладали крупными полноценными семянками, хорошо созревающими, к тому же, в условиях нашего климата (рис. 8).

Свойство «гетерозиса» у некоторых форм семенного поколения



Рис. 9. Форма новообразования подсолнечника с особо мощным развитием вегетативных органов и слабым развитием генеративных.

растений-новообразований проявляется и на ряде других признаков, например, мощности развития вегетативной массы, высоте растения, скороспелости и т. п. У отдельных полученных нами форм имело место необычайно мощное развитие вегетативных органов, главным образом листьев, что опять-таки представляет и практический интерес, т. к. такие растения могут использоваться в качестве исходного материала для селекции силосных форм.

В наших опытах с растениями-новообразованиями подсолнечника мы неоднократно отмечали, что усиление развития одного признака или свойства обычно вызывает усиленное развитие других, например, мощное развитие вегетативных органов сопровождалось соответственным развитием генеративных частей. Однако

следует отметить, что это обстоятельство не всегда имеет место. Были случаи совершенно необычного по мощности развития вегетативной массы, где число листьев и их величина резко отличались от контроля (рис. 9), тем не менее такие растения образывали одну или несколько сравнительно маленьких корзинок.



Рис. 10. Форма новообразования подсолнечника со слабо развитой вегетативной частью и сильной развитой корзиной.

Наоборот, встречались и такие формы, у которых при карликовом росте и относительно слабо развитой листовой системе развивались весьма большие корзинки с крупными хорошо выполненными семянками (рис. 10).

Весьма интересным с точки зрения морфофизиологических отклонений от нормы является наблюдающееся иногда в нулевом поколении растений-новообразований нарушение геотропического

эффекта. Степень проявления этого тератизма весьма различна. Обычно нарушение геотропического эффекта наблюдалось только на первых этапах онтогенеза и носило временный характер, однако, в одном случае это явление имело место до конца жизненного цикла растения (рис. 11).

Из приведенных примеров следует, что одно из положений мичуринской биологии о противоречивости живого тела как основы



Рис. 11. Случай резкого изменения геотропического эффекта у растения-новообразования подсолнечника.

увеличения жизнеспособности организма приложимо и к растениям-новообразованиям.

У этих растений такое противоречие создается благодаря необычному способу заложения и развития адвентивного зародыша и проявляется в последующем половом процессе семенного потомства. При этом не наблюдается резкого снижения жизнеспособности в последующих поколениях. Все это, таким образом, представляется важным не только с теоретической, но и с практической стороны.

Наконец, можно отметить, что в ряде случаев процесс онтогенеза некоторых растений происходил с явным отклонением в сторону диких форм, причем это имело место не только по одному какому-либо признаку или свойству, а по целому ряду их. Такие растения как бы полностью теряли свои культурные особенности

и при сравнении ничем не отличались от диких форм (рис. 12). Современные сорта культурных подсолнечников *Helianthus cultus* Wenz., как известно, резко отличаются от исходных диких подсолнечников *Helianthus ruderalis* по характеру ветвистости, отсутствию главного стебля, форме листьев, количеству и величине корзинок



Рис. 12. Форма новообразования подсолнечника по всем своим основным признакам идентичная дикому калифорнийскому виду.

и размерам семян. Мы получали такие формы растений-новообразований, которые по всем этим признакам полностью относились к *Helianthus ruderalis* — дикому калифорнийскому подсолнечнику.

Можно было бы привести еще не мало разнообразных примеров, свидетельствующих о громадных формообразовательных воз-

возможностях, имеющих место у растений-новообразований, полученных методом культуры тканей. Нам кажется, однако, что для подтверждения ценности последнего, при разрешении проблем органогенеза и морфогенеза растений, вполне достаточно вышеизложенного.

Основные выводы:

1. Метод культуры ткани представляет собой один из конкретных экспериментальных путей изучения способа детерминации размера, формы, архитектоники, скорости развития и функции как отдельных частей растения, так и всего организма в целом. Однако этот метод может сыграть лишь подсобную, вспомогательную роль, если исследователь ограничивается культивированием и изучением изолированного от организма органа или ткани. Более того, метод культуры тканей может привести к ошибочным выводам, если упустить из вида условия развития органов в процессе их исторического образования.

Метод культуры ткани оказывается мощным инструментом в изучении вопросов морфогенеза только тогда, когда, во-первых, в качестве ведущей основы используется исторический метод исследования и, во-вторых, когда объектом изучения является вновь образующийся в процессе дифференцировки клеток культивируемой ткани целый организм, а не только отдельные органы.

2. Получающееся из зародышей-новообразований растения, вследствие необычного способа их воспроизведения и особенностей взаимоотношений процессов образующих их элементов с продуктами дегенерации и дезинтеграции, обладают весьма расшатанной наследственной основой. Тип обмена веществ таких растений оказывается измененным и неустойчивым.

Воздействие на зародыш-новообразование определенными условиями воспитания приводит через несколько поколений к установлению нового типа обмена веществ, новой наследственности, которая приобретает у последующих поколений свойства консерватизма.

Изменение типа обмена веществ у растений-новообразований ведет к ряду морфологических и биологических изменений.

Морфофизиологические изменения в растениях-новообразованиях проявлялись как у генеративных, так и у вегетативных органов. К числу таких изменений относятся, например, патологические формы соцветий, карликовые и гигантские формы, нарушение геотропического эффекта у главного стебля, изменение типа ветвления и т. д.

3. Первое, второе, третье и четвертое, а возможно, и последующие, семенные поколения растений-новообразований при соответствующих благоприятных условиях выращивания проявляют резкие «гетерозисные» свойства, значительно усиливая приобретенные в процессе окультуривания признаки и свойства, подобно

тому, что наблюдается в первом поколении половых гибридов, однако без значительного снижения этих свойств в последующих поколениях.

4. Расшатанная наследственность и пластичность растений-новообразований дает возможность использовать их в качестве исходного материала для селекционных работ, в частности для выведения масличного и кормового сортов подсолнечника, пригодных для культивирования в Эстонской ССР

ЛИТЕРАТУРА

- Бекетов, А. Н. Курс ботаники. СПб, 1862.
- Глушченко, И. Е., Элленгорн, Я. Е. Афанасьева, А. С., Жиронкин, И. М. К вопросу о возникновении и развитии растительных клеток. Тр. и-а генетики, 20, 1953.
- Завадский, К. М. О внутриклеточном возникновении меристемных клеток и путях формирования побегов-новообразований у бегонии. ДАН СССР, Нов. сер., LXXIX, 1, 1951.
- Завадский, К. М. О закономерностях образования новых почек на листьях при вегетативном размножении растений. Научн. сессия 1952—53 г. ЛГУ. Тезисы докладов, 1952.
- Кренке, Н. П. Регенерация растений. Изд. АН СССР, Москва—Ленинград, 1950.
- Модилевский, Я. С. Современное состояние вопроса об эндосперме у покрытосеменных растений. Изв. АН СССР, Сер. биол., № 2, 1950.
- Морозов, В. К. Агробиологические основы возделывания подсолнечника. Саратов. книжн. изд., 1953.
- Михайлов, О. Ф. Морфогенез новообразований подсолнечника и гороха, полученных на изолированных семядолях. Ученые записки ЛГУ № 139, сер. биол. наук, вып. 26, 1951.
- Михайлов, О. Ф. Биологическая специфика семядолей в семенах растений, не сохраняющих эндосперм. Научн. Труды посвящ. 150-летию ТГУ. 1952.
- Навашин, М. С., Герасимова Навашина, Е. Н., Яковлев, М. С. О роли неклеточного живого вещества в процессе воспроизведения у растений. Изв. АН СССР, сер. биол., № 5, 1952.
- Презент, И. И. Биологическое значение двойного оплодотворения, «Агробиология», № 5, 1948.
- Тимирязев, К. А. Факторы органической эволюции, 1890.
- Уайт, Ф. Р. Культура растительных тканей. Изд-во Иностр. лит., Москва, 1949.
- Lund, E. J. Electric correlation between living cells in cortex and wood in the Douglas fir. *Plant Physiol.*, 6, 1931.
- Pearsall, W. H. and Priestley, J. H. Meristematic tissues and protein iso-electric points. *New Phytol.*, 22, 1923.
- Priestley, J. H. The meristematic tissue of the plant. *Biol. Rev.*, 3, 1928.
- Priestley, J. H. Studies in the Physiology of cambial activity. III. The seasonal activity of the cambium. *New Phytol.*, 29, 1930.
- Rosene, H. F. and Lund, E. J. Linkage between output of electric energy by polar tissues and cell oxidation. *Plant Physiol.*, 10, 1935.
- White, F. R. Controlled differentiation in a plant tissue culture. *Bull. Torrey Bot. Club.*, 66, 1939.

KUDEDE KULTUURI MEETOD JA UUTE TAIMEVORMIDE SAAMINE

Dots., biol. tead. kand. O. Mihhailov

Geneetika ja darvinismi kateeder

Resümee

1. Koekultuuri meetod on üheks konkreetsetest eksperimentaalsetest teedest nii taime osade kui ka kogu taime kui terviku mõõtmete, kaju arhitektoonika, arenemise, kiiruse ja funktsiooni determinatsiooni viisi uurimiseks. Kuid juhul, kui uurija piirdub vaid organismist isoleeritud organi või koe kultiveerimise ja uurimisega, võib see meetod omada vaid teisejärgulist, abistavat tähtsust. Veelgi enam, koe kultuuri meetod võib viia ekslikele järeldustele, kui jätta arvestamata organite arenemise tingimusi nende ajaloolise kujunemise protsessis.

Koekultuuri meetod on võimas vahend morfogeneesi küsimuste uurimisel vaid siis, kui võetakse aluseks ajalooline uurimismeetod ja kui uurimisobjektiks on kultiveeritava koe rakkude diferentseerumise protsessis tekkinud terve organism, aga mitte ainult tema üksikud organid.

2. Loodetest-uudikmoodustistest tekkinud taimedel on oma ebarililik tekkeviis ja neid moodustavate elementide ja degeneratsiooni ning desintegratsiooni produktide vastastikuse assimilat-siooni protsesside omapärasuste tõttu kõigutatud pärilikkus. Selliste taimede ainevahetuse tüüp on muutunud ja ebapüsiv.

Looete-uudikmoodustise mõjutamine kindlate kasvutingimustega viib mõne põlvkonna vältel uue ainevahetuse tüübi, uue pärilikkuse tekkimisele, mis omandab järgnevates põlvkondades konservatiivsuse omadused.

Ainevahetuse tüübi muutumine taimedel-uudikmoodustistel viib reale morfofüsioloogilistele ja bioloogilistele muutustele.

Morfofüsioloogilised muutused tekivad nii taimede-uudikmoodustiste generatiivseis kui ka vegetatiivseis organeis. Selliste muutuste hulka kuuluvad näiteks õisikute patoloogilised vormid, kääbus- ja hiigelvormid, geotroopilise efekti kadumine peavarrel, hargnemise tüübi muutumine jne.

3) Esimesel, teisel, kolmandal, neljandal ja võib-olla ka järgnevatel taimede-uudikmoodustiste seemnepõlvkondadel tulevad vastavates soodsates tingimustes esile tugevad „heteroosi” nähtused, mis tugevdavad tunduvalt kultuurseks muutumise protsessis omandatud tunnuseid ja omadusi sarnaselt suguliste hübriidide esimese põlvkonnaga, kuid ilma nende omaduste märgatava nõrgenemiseta järgnevatel põlvkondades.

4. Taimede-uudikmoodustiste kõigutatud pärilikkus ja plastilisus teeb võimalikuks nende kasutamise selektsioonitöö lähtematerjalina, käesoleval juhul päevalille õli- ja söödasortide aretamiseks, mis sobiks kultiveerimiseks Eesti NSV-s.

SISUKORD
СОДЕРЖАНИЕ

G. Kangro. O multiplikatsioonide summeeritavuse kohta kahe rida jaoks	3
G. Kangro. Summeeruvusteguritest kahekordsete ridade puhul (<i>Resümee</i>)	41
X. Jaakson. O topoloogilise probleemide lahendamise kohta kahe värvi puhul	43
H. Jaakson. Topoloogilise kahevärvi probleemi lahendusest (<i>Resümee</i>)	62
X. Jaakson. O sümmeetriliste lahenduste kohta ühe diofantose võrrandi	63
H. Jaakson. Diofantose ühe võrrandi sümmeetrilistest lahendustest (<i>Resümee</i>)	83
E. Varep. Eesti NSV rannikumerede hüdrograafilise uurimise ajaloost (kuni 1917. aastani)	85
Э. Вареп. Исторический очерк гидрографического исследования Балтийского моря на берегах Эстонской ССР (до 1917 г.) (<i>Резюме</i>)	99
A. Рымусокс. Стратиграфия кукурусского горизонта (C ₁₁) Эстонской ССР	101
A. Rõõmusoks. Kukruse lademe (C ₁₁) stratigraafia Eesti NSV-s (<i>Resümee</i>)	130
J. Piiper. Selgroo evolutsioonilisest morfoloogiast	131
И. Пийпер. Об эволюционной морфологии позвоночника (<i>Резюме</i>)	137
И. Пийпер. О морфологии и о закономерностях постэмбрионального развития костного позвоночника у окуня (<i>Perca fluviatilis</i> L.)	138
J. Piiper. Ahvena (<i>Perca fluviatilis</i> L.) luust selgroo morfoloogiast ja selle postembrüonaalse arenemise seaduspärasusist (<i>Resümee</i>)	147
J. Veldre. Eesti NSV mageveelistest vabaltelavatest aerjalalistest	149
И. Велдре. О пресноводных свободноживущих веслоногих Эстонской ССР (<i>Резюме</i>)	157
О. Михайлов. К вопросу о филогенетическом значении явления регенерации у растений	161
О. Mihhailov. Taimede regeneratsiooninähtuse fülogeneetilisest tähtsusest (<i>Resümee</i>)	172
Э. Пийпер. Культивирование каллюса изолированной семядоли как способ получения растений новообразований	174
E. Piiper. Uudikmoodustiste saamine isoleeritud idulehtede kallusest (<i>Resümee</i>)	188
О. Михайлов. Метод культуры тканей и получение новых форм растений	190
О. Mihhailov. Kudede kultuuri meetod ja uute taimvormide saamine (<i>Resümee</i>)	211

TRÜKIVIGU

Lk.	Rida	On trükitud	Peab olema
10	1 ülalt	$1^{\circ} \sum_{,v}^{m,n}$	$1^{\circ} \sum_{\mu,v}^{m,n}$
19	3 alt	$a_{mn\mu\nu} = 0$	$a_{mn\mu\nu} = 0$
31	10 alt	$2^{\circ} \Delta_{\nu} \varepsilon_{\mu\nu}$	$3^{\circ} \Delta_{\nu} \varepsilon_{\mu\nu}$

ТРУДЫ ЕСТЕСТВЕННО МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ФАКУЛЬТЕТА

На русском и эстонском языках

Эстонское Государственное Издательство,
Таллин, Пярну маантэ 10.

*

Toimetaja J. Metsar.

Tehniline toimetaja H. Kohu

Korrektorid A. Kalberg ja I. Roots

Ladumisele antud 23. VII 1956. Trükkimisele antud
4. III 1957. Paber $60 \times 92, \frac{1}{16}$. Trükipoognaid $13,5 + 2$
kleebist. Arvutuspoognaid 12,93. Trükiarv 700. MB-01656.
Tellimise nr. 2250. Hans Heidemanni nim. trükikoda,
Tartu, Vallikraavi 4.

Hind rbl. 9.50

/