

П. ИЫГАР

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВОДОПРОНИЦАЕМОСТИ КОРЕННЫХ ПОРОД

(НА ПРИМЕРЕ СЕВЕРО-ВОСТОЧНОЙ ЭСТОНИИ)

В районе Пандивереской возвышенности, в пределах Раквереского и Пайдеского районов Эстонской ССР, к настоящему времени известно более четырехсот эксплуатационных буровых скважин, которые служат основным источником водоснабжения данного района.

Для каждой скважины имеются данные о дебите и понижении динамического уровня, полученные путем пробной откачки. Нами вычислены коэффициенты фильтрации пород, вскрываемых рабочими частями скважин, по следующей формуле (Справочное руководство гидрогеолога, 1967):

$$K = \frac{0,366Q}{Ls} \log \frac{1,6L}{r_0}, \quad (1)$$

где  $K$  — коэффициент фильтрации,  $м/сутки$ ;  $Q$  — дебит скважины,  $м^3/сутки$ ;  $s$  — понижение динамического уровня,  $м$ ;  $L$  — длина рабочей части скважины,  $м$ ;  $r_0$  — радиус рабочей части скважины,  $м$ .

Коэффициенты фильтрации пород, вскрываемых рабочими частями эксплуатационных скважин Северной Эстонии, характеризуют такие интервалы, которые не поддаются систематической группировке как по уровням стратиграфических горизонтов, так и по уровням литологических разновидностей (пачек). Табл. 1 дает представление о такой обстановке на примере 10 скважин в районе поселков Ракке и Салла Раквереского района, где рабочие части скважин вскрывают стратиграфические горизонты от  $S_{1gk}$  до  $O_{3rg}$  самым различным образом.

Средний коэффициент фильтрации, вычисленный по всем скважинам и для всех горизонтов, равен  $9,51 м/сутки$ . Расчленив породы на группы, состоящие, например, из горизонтов  $S_{1tm}$ ,  $S_{1jr}$  и  $O_{3rk}$ ,  $O_{3rg}$ , получим для пород первой группы значение  $K=14,34 м/сутки$  (скв. 4—6, 8, 9), а для второй —  $K=9,25 м/сутки$  (скв. 10). Остается неиспользованной информация четырех скважин, так как они вскрывают породы обеих групп.

Целью настоящей статьи является определение средних коэффициентов фильтрации каждого вскрываемого скважинами стратиграфического горизонта. Для этого пригоден, например, уже используемый метод наименьших квадратов. Так, известно (Силин—Бекчурин, 1965), что средневзвешенный коэффициент фильтрации  $K$  слоистой неоднородной толщи (состоящей из  $n$  слоев с соответствующими коэффициентами фильтрации

Таблица 1

Номер скважины	Вскрытость горизонтов, м					Суммарный коэффициент фильтрации (по формуле (1)), м/сутки	Длина рабочей части скважины, м
	S <sub>1rk</sub>	S <sub>1tm</sub>	S <sub>1jr</sub>	O <sub>3pk</sub>	O <sub>3pg</sub>		
1		8,0	13,0	9,0	11,0	4,32	41,0
2	1,0	9,0	11,0	10,0	29,0	2,30	60,0
3		8,6	13,0	9,0	5,0	0,32	35,6
4		3,0	9,0			0,61	12,0
5		3,0	5,0			27,19	8,0
6		2,0	10,0			8,21	12,0
7		4,0	13,0	7,0	32,0	1,70	56,0
8		5,0	13,0			35,28	18,0
9		4,0	12,0			0,4	16,0
10				7,0	16,0	9,25	23,0

$k_1, k_2, \dots, k_n$  и мощностями  $m_1, m_2, \dots, m_n$ ) при одномерном движении подземных вод по напластованию равен

$$K = \frac{k_1 m_1 + k_2 m_2 + \dots + k_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2)$$

При допущении, что число скважин  $r$  больше числа слоев  $n$ , значения  $k_i$  для каждого слоя (горизонта) вычисляются методом наименьших квадратов. Тогда система уравнений, подлежащая решению, состоит из  $r$  однотипных уравнений вида (2).

Однако при малом числе скважин, вскрывающих разные слои (горизонты) к тому же неравномерно, указанный метод может дать неудовлетворительные результаты. Величины  $k_i$  попадают иногда в нереальные интервалы значений:  $k_i > 100$  м/сутки и даже  $k_i < 0$ . В то же время известно, что в условиях карбонатной толщи ордовика и силура Эстонии коэффициенты фильтрации колеблются в пределах 0,01—50 м/сутки. Случай отрицательных коэффициентов фильтрации является в гидродинамическом смысле абсурдом.

Рассмотрим другой способ вычисления средних коэффициентов фильтрации, гарантирующий такие значения  $k_i$ , которые не были бы выше наибольшего и ниже наименьшего значений суммарного коэффициента фильтрации  $K$  скважин, где данный горизонт  $i$  вскрыт.

Например, в случае приведенных в табл. 1 скважин средние коэффициенты фильтрации горизонтов O<sub>3pk</sub> и O<sub>3pg</sub> должны находиться в пределах 0,32—9,25 м/сутки.

Пусть дано  $r$  ( $r=1, 2, \dots, R$ ) скважин, рабочие части (фильтры) которых вскрывают  $i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) стратиграфических горизонтов соответственно на протяжении  $n_{ir}$  ( $n_{11}, n_{21}, \dots, n_{NR}$ ) метров. Каждой скважине  $r$  соответствует суммарный коэффициент фильтрации  $k_r$  (см. табл. 2).

Введем допущение, что в скважине  $r$  на всем протяжении ее рабочей части вскрыты однородные породы, т. е.

$$k_{1r} = k_{2r} = \dots = k_{Nr} = k_r \quad (r=1, 2, \dots, R), \quad (3)$$

где  $k_{ir}$  — коэффициенты фильтрации пород  $i$ -го горизонта в скважине  $r$ .



Таблица 2

Номер скважины	Вскрытость горизонтов	Коэффициент фильтрации $k_r$	Суммарная длина рабочей части
			$S_r = \sum_{i=1}^N n_{ir}$
1	$n_{11} \quad n_{21} \quad \dots \quad n_{N1}$	$k_1$	$S_1$
2	$n_{12} \quad n_{22} \quad \dots \quad n_{N2}$	$k_2$	$S_2$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
R	$n_{1R} \quad n_{2R} \quad \dots \quad n_{NR}$	$k_R$	$S_R$

Первый способ вычисления значений  $k_i$  основывается на следующей мысленной схеме операций (схема I).

1) Из метровых частей кернов  $R$  скважин образуют совокупность (всего  $\sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^R n_{ir}$  частей).

2) Из данной совокупности по макроскопическим признакам выбирают те части керна, которые соответствуют  $i$ -му стратиграфическому горизонту. Затем измеряют коэффициент фильтрации каждого из них. Измеренный керн откладывают в сторону. Согласно допущению (3) результатами замеров являются значения из совокупности чисел  $k_r$  в табл. 2.

3) После повторения этих операций с породами всех горизонтов в конце опыта будут однократно измерены все части керна. Средний коэффициент фильтрации  $i$ -го горизонта  $k_{i1}$ , соответствующий схеме I, вычисляется как арифметическое среднее замеров  $i$ -го горизонта.

Схеме I соответствует формула

$$k_{i1} = \frac{\sum_{r=1}^R n_{ir} k_r}{\sum_{r=1}^R n_{ir}} \quad (4)$$

Второй способ базируется на понятии условной вероятности.

Обозначим через  $p_{ir}$  вес  $i$ -го горизонта (в метрах) в общей мощности пород, вскрываемых рабочей частью скважины  $r$ , т. е.

$$p_{ir} = \frac{n_{ir}}{\sum_{i=1}^N n_{ir}} \quad (5)$$

В то же время формула (5) выражает вероятность взятия случайной метровой части керна из совокупности, состоящей только из частей керна скважины  $r$ .

Схема II состоит из следующих операций.

1) Из частей керна образуют ту же совокупность (всего  $\sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^R n_{ir}$  частей).

2) Берут случайную часть керна и по макроскопическим признакам устанавливают ее принадлежность тому или иному горизонту. Допустим,

что она принадлежит  $i$ -му горизонту. Вероятность того, что эта часть принадлежала первоначально  $r$ -й скважине, по формуле Байеса равна

$$P(i/r) = \frac{p_{ir} \frac{1}{R}}{p_{i1} \frac{1}{R} + p_{i2} \frac{1}{R} + \dots + p_{iR} \frac{1}{R}} =$$

$$= \frac{p_{ir}}{p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{iR}} \quad (r = 1, 2, \dots, R). \quad (6)$$

Тогда математическое ожидание коэффициента фильтрации этой части керна равно

$$k_{i\Pi} = \frac{p_{i1} k_1}{p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{iR}} + \dots + \frac{p_{iR} k_R}{p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{iR}} =$$

$$= \sum_{r=1}^R \frac{p_{ir}}{\sum_{r=1}^R p_{ir}} k_r. \quad (7)$$

Приведенное рассуждение можно представить также следующим образом.

1) Из общей совокупности ( $\sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^R n_{ir}$  частей) берут случайную часть и устанавливают ее принадлежность тому или другому горизонту. Изменяют ее коэффициент фильтрации (результатом будет одно из чисел  $k_1, k_2, \dots, k_R$ ). Взятую часть возвращают в общую совокупность. Результат измерения записывают в таблицу, где каждому горизонту соответствует своя графа.

2) Убедившись, что при многократном повторении операций все горизонты представлены достаточное число раз, вычисляют средний коэффициент фильтрации каждого горизонта  $k_{i\Pi}$  как среднее арифметическое от измеренных значений коэффициентов соответствующих горизонтов.

Оказывается, что среднеквадратическая ошибка схемы II меньше или равна среднеквадратической ошибке схемы I, т. е.

$$\frac{\sum_{r=1}^R (k_r - \sum_{i=1}^N p_{ir} k_{i\Pi})^2}{R} \leq \frac{\sum_{r=1}^R (k_r - \sum_{i=1}^N p_{ir} k_{iI})^2}{R}. \quad (8)$$

Докажем справедливость этого утверждения (8) аналитически. Для этого убедимся в справедливости равенства

$$\frac{\sum_{r=1}^R k_r}{R} = \sum_{i=1}^N k_{i\Pi} \frac{\sum_{r=1}^R \frac{n_{ir}}{\sum_{i=1}^N n_{ir}}}{R}, \quad (9)$$

которое можно представить в виде



$$\frac{\sum_{r=1}^R k_r}{R} - \sum_{i=1}^N k_{iII} \frac{\sum_{r=1}^R p_{ir}}{R} = \frac{\sum_{r=1}^R (k_r - \sum_{i=1}^N p_{ir} k_{iII})}{R} = 0. \quad (10)$$

Напомним, что значение  $k_{iII}$  вычисляется в данном случае при помощи формулы (7). Введем следующие обозначения сумм:

$$\sum_{r=1}^R p_{1r} = P_1; \quad \sum_{r=1}^R p_{2r} = P_2; \quad \dots; \quad \sum_{r=1}^R p_{Nr} = P_N. \quad (11)$$

Тогда, далее

$$\sum_{i=1}^N k_{iII} \frac{\sum_{r=1}^R p_{ir}}{R} = \left( \frac{p_{11}}{P_1} k_1 + \dots + \frac{p_{1R}}{P_1} k_R \right) \frac{P_1}{R} + \dots + \left( \frac{p_{N1}}{P_N} k_1 + \dots + \frac{p_{NR}}{P_N} k_R \right) \frac{P_N}{R} = \quad (12)$$

$$= \frac{p_{11}k_1 + \dots + p_{1R}k_R}{R} + \dots + \frac{p_{N1}k_1 + \dots + p_{NR}k_R}{R} = \quad (13)$$

$$= \frac{k_1(p_{11} + p_{21} + \dots + p_{N1})}{R} + \dots + \frac{k_R(p_{1R} + p_{2R} + \dots + p_{NR})}{R}. \quad (14)$$

Учитывая на основе формулы (5), что

$$\sum_{i=1}^N p_{ir} = 1 \quad (r = 1, 2, \dots, R), \quad (15)$$

получим, наконец,

$$\sum_{i=1}^N k_{iII} \frac{\sum_{r=1}^R p_{ir}}{R} = \frac{\sum_{r=1}^R k_r}{R}. \quad (16)$$

Из эквивалентности равенств (9) и (10) следует их внешняя аналогия со следующим свойством арифметического среднего:

$$M(\xi - a) = 0, \quad (17)$$

т. е. первый момент случайной величины равен нулю, или отклонения случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  от их арифметического среднего  $M\xi = a$  «погасят» друг друга (сумма отклонений равна нулю).

Из аналогии между формулами (10) и (17) можно считать значения  $k_1, k_2, \dots, k_R$  случайными величинами, а значение суммы  $\sum_{i=1}^N p_{ir} k_{iII}$  — их математическим ожиданием (на этом допущении основывается также способ вычисления  $k_i$  методом наименьших квадратов). Следовательно, минимальным является и среднеквадратическое отклонение

$$\frac{\sum_{r=1}^R (k_r - \sum_{i=1}^N p_{ir} k_{iII})^2}{R} = \min. \quad (18)$$



## Коэффициенты фильтрации коренных пород, м/сутки

Группы скважин	Местоположение группы скважин	Стратиграфические горизонты																					Количество анализируемых скважин						
		См—О	O <sub>1</sub> pkT	O <sub>1</sub> lt	O <sub>1</sub> vl	O <sub>1</sub> kn	O <sub>2</sub> as	O <sub>2</sub> ls	O <sub>2</sub> uh	O <sub>2</sub> kk	O <sub>2</sub> id	O <sub>2</sub> jh	O <sub>2</sub> kl	O <sub>2</sub> op	O <sub>3</sub> rkP	O <sub>3</sub> rkT	O <sub>3</sub> nbP	O <sub>3</sub> nbS	O <sub>3</sub> vr	O <sub>3</sub> pg	O <sub>3</sub> pk	S <sub>1</sub> jr		S <sub>1</sub> tm	S <sub>1</sub> rk				
1	Кохала	(11,98)	(0,88)						(6,91)	(8,33)																5			
2	Кильги-Убья	3,42	(1,52)	1,47	1,06	2,13	5,66	6,36	2,93														12						
3	Вийтна	0,64	(0,44)			0,65	0,63		0,99	1,92													9						
4	Вохнья	(6,53)						(5,61)	2,32	1,97	0,83	(0,41)											4						
5	Мыэдаку	7,92	1,64	1,58	1,03	1,83	2,50	5,87	11,95	6,32	(5,38)	(0,34)											10						
6	Ваекюла	(2,16)	1,81		1,76	1,76	1,01	1,10	1,94	7,88	7,95	4,22	5,27	(5,85)											16				
7	Раквере	3,23	(0,59)	2,44	5,94	10,29	12,74	12,97	18,45	10,24	11,84	8,66	(0,67)	(0,81)											25				
8	Кадрина	1,08	(0,96)	0,49		0,56	0,67		1,28	2,96			1,50	(0,55)											11				
9	Виру-Яагупи	1,75	0,61	0,73	0,65	0,50	0,89			1,06	0,84	0,83	0,82	0,73	(0,40)		1,58								11				
10	Кулленга	(2,64)									(0,29)	(0,25)	(0,39)			1,20			6,17	(18,21)						9			
11	Кику	(0,17)						(0,40)	0,83	1,62	1,64	1,46	1,57	2,86											9				
12	Тапа							(0,36)	0,88	1,48	1,60	1,97	5,00	10,28	8,11	(0,96)											14		
13	Лехтсе									(0,58)	3,31	3,09	1,54											6					
14	Янеда	(0,28)						(1,35)	0,92	0,92	1,24	2,89	(3,27)											12					
15	Кюти							(0,83)	1,89	3,74	4,17		4,41													6			
16	Поркуни								(0,33)		0,19		0,93			9,03	6,52						9						
17	Тамсалу																7,52	9,16	11,30	7,49	(3,96)				15				
18	Амбла								0,08	1,56	1,48	1,09	1,05	0,84	0,45	0,12											18		
19	Туду	(0,48)	(0,27)						0,65													5							
20	Виру-Роэла	(1,05)	(0,01)						1,64			1,54			(0,04)	1,89											10		
21	Вяйке-Маарья							(0,2)			3,43			4,62	2,86	2,25	(0,03)						15						
22	Ваянгу							(4,25)			3,62	4,92	5,71	(3,35)											12				
23	Сейдла							0,65	0,49	0,56	0,17	0,09	0,09	0,11	0,19	0,25	0,40	0,49											14
24	Паасвере										(0,16)		1,47	2,94											7				
25	Пудивере							(3,66)			(3,44)		9,37	12,33	(20,40)											5			
26	Кильтси										(15,38)		(19,16)	6,18	10,87											7			
27	Лавере-Варангу										(11,25)		(9,56)	6,32	4,25	(3,56)											8		
28	Ярва-Яани										(10,54)		14,47	14,47	14,47											7			
29	Аллику										(0,19)		1,02	7,11	5,19	3,73											14		
30	Ракке-Салла												4,50	4,14	10,37	13,08	(2,30)											10	
31	Козру							(15,36)			(13,27)	(10,2)	5,41	15,30	9,66	6,21	6,27											15	
32	Пээтри												5,05	4,64	4,74	1,68											9		
33	Анна										(0,25)		(0,76)	8,78	4,14	(3,33)											9		
34	Эсна												8,30	10,35	4,72	4,55											6		
35	Водья												39,7	31,9	10,8	82,3	99,6											6	
36	Пайде							(1,28)			(0,87)	6,88	6,66	5,91	6,18	14,71											16		
37	Имавере												0,49	1,76	13,99	2,71	6,58											12	

Примечание: скобками (...) указаны горизонты, которые вскрыты в данной группе менее, чем в трех скважинах; обранием [...] указаны водоупоры.



При любых других значениях  $k_i$ , в том числе вычисленных по схеме I, равенство (9) не выполняется и, следовательно, среднеквадратическое отклонение не является минимальным.

Последнее утверждение можно легко проверить, подставив в правую часть равенства (9) значения  $k_i$ , вычисленные при помощи формулы (4). Лишь в том случае, когда скважины имеют равные длины рабочих частей независимо от принадлежности пород к тому или другому горизонту, т. е. если

$$S_1 = S_2 = \dots = S_n, \quad (19)$$

среднеквадратические ошибки (отклонения) обеих схем равны. Более того, в последнем случае равны соответствующие значения  $k_i$

$$k_{iI} = k_{iII} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (20)$$

Это и естественно, так как в случае соблюдения условия (19) Байесова условная вероятность схемы II равна вероятности взятия одной части керна по схеме I.

Пример. В случае данного в табл. 1 набора скважин обе схемы дают следующие (см. табл. 3) значения  $k_i$  соответствующих стратиграфических горизонтов.

Таблица 3

	Схема I (формула (4))	Схема II (формула (7))
$S_{1rk}$	2,30	2,30
$S_{1tm}$	7,35	13,09
$S_{1jr}$	8,03	10,37
$O_{3pk}$	3,37	4,14
$O_{3pg}$	3,42	4,50
Среднеквадратическая ошибка	132,63	119,48

При вычислении  $k_i$  по схеме II (формула (7)) больший вес приобретают те скважины, которые вскрывают минимальное число горизонтов.

Например, схема II оценивает коэффициент фильтрации скв. № 6 (8,21 м/сутки) при вычислении  $k_i$  горизонта  $S_{1jr}$  почти в 2 раза выше, чем схема I (соответствующие веса 0,18 и 0,10). Коэффициент фильтрации скв. № 4, наоборот, оценивается при вычислении  $k_i$  того же горизонта по схеме II почти в 3 раза ниже (веса 0,04 и 0,11).

Указанный выше метод (формула (7), и схема II) был применен для вычисления средних коэффициентов фильтрации коренных пород Пандивереской возвышенности (на площади 6450 км<sup>2</sup>). 400 скважин были разделены на 37 групп в зависимости от их расположения. Результаты приведены в табл. 4.

Горизонты коренных пород Северной Эстонии ордовика ( $O_1$ — $O_3$ ) и силура ( $S_1$ ,  $S_2$ ) погружаются в южном направлении. Поэтому в северных группах верхние горизонты не представлены. В южных группах нижние горизонты ( $O_1$  и  $O_2$ ) не вскрыты буровыми скважинами.

В связи с затуханием трещиноватости по мере погружения слоев вполне закономерным является соответственное уменьшение значений  $k_i$ . Исключение составляют породы горизонтов  $S_{1jr}$  и  $O_{2kl}$ ,  $O_{2op}$ , которые признаны в качестве водоупорных благодаря содержанию значительных мергелистых прослоек (Верте, 1965). Указанные в табл. 4 значения  $k_i$  этих горизонтов подтверждают этот вывод.

В некоторых группах скважин (см. табл. 4, группы 6, 7, 16, 26, 28, 31, 35, 36) высокие значения  $k_i$  обусловлены, по-видимому, тектонической трещиноватостью и усиленным развитием карстовых процессов в этих районах.

Очевидно, в коренных породах ордовика и силура нет регионально выдержанных водоупоров, имеющих постоянные параметры водопроницаемости по всей территории. Водоупор, залегающий в породах горизонтов  $O_1pkT-O_2as$ , развит на северной окраине Пандивереской возвышенности, водоупор в породах горизонтов  $O_2kl$  и  $O_2op$  — в центральной части. Породы между обоими водоупорами (горизонты  $O_2kk$ ,  $O_2id$  и  $O_2jh$ ) имеют, как правило, высокую водопроницаемость. Наиболее высокие значения коэффициентов  $k_i$  встречаются в породах горизонтов  $O_3rg$  и  $O_3rk$ . Водоупор в горизонте  $S_1jg$  носит относительный характер ( $k_i = 3 \div 4$  м/сутки), так как залегает на сравнительно небольшой глубине.

По данным коэффициентов фильтрации вырисовываются характерные черты распределения водоносных горизонтов в коренных породах Северо-Восточной Эстонии. Подтверждение вывода о таком гидростратиграфическом строении данной территории осуществимо также при помощи других признаков и будет приведено в последующих публикациях.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Верте А. И. 1965. Основные черты гидрогеологического строения и формирования подземных вод Эстонского артезианского бассейна. Изв. АН ЭССР, Сер. биол., 14, № 4.
- Силин-Бекручин А. И. 1965. Динамика подземных вод. Изд. МГУ. Справочное руководство гидрогеолога. 1967. I, Л.

Институт геологии  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
18/I 1972

P. JÖGAR

#### VEEJUHTIVUSE PARAMEETRITE ARVUTAMINE (KIRDE-EESTI ALUSPÕHJA KIVIMITE ALUSEL)

Artiklis on tuletatud ühe kihi keskmise filtratsioonimooduli  $k_i$  arvutamise juhend summaarsete, s. o. mitme kihi kohta kehtivate filtratsioonimoodulite  $k_i$  alusel (valem (7)).  $r=1, 2, \dots, R$  (puuraukude arv),  $i=1, 2, \dots, N$  (lademete arv),  $p_{ir}$  —  $i$ -nda lademe kivimite osakaal  $r$ -ndas puuraugus]. Valem (7) on tuletatud eeldusel (3).

On arvutatud 23 Kirde-Eesti aluspõhja kivimite stratigraafilise horisondi filtratsioonimoodulite väärtused 37 kohas (tab. 4).

P. JÖGAR

#### CALCULATION OF THE PARAMETERS OF PERMEABILITY (ON EXAMPLES OF NORTHEAST-ESTONIAN BEDROCK)

The author presents an instruction on calculating the mean filtration module  $k_i$  of a stratum when the summary module  $k_r$  is known, which is obtained at simultaneous pumping of several water-bearing strata. This is shown in formula (7). Here  $r=1, 2, \dots, R$  — the number of bore-holes,  $i=1, 2, \dots, N$  — number of strata.  $p_{ir}$  — weight of rocks of the stratum  $i$  in the bore-hole  $r$ . The formula (7) is derived under conditions (3).

On the basis of the formula (7), the values of the filtration module of 23 rock strata of Northeast Estonia have been derived.